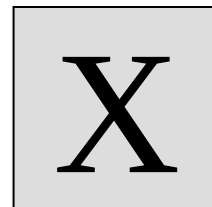




INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GALAȚI
COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI” GALAȚI
Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”
3 decembrie 2024
ETAPA JUDEȚEANĂ
MATEMATICA -BAREM



Problema I (10 puncte)

a) Arătați că $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{(a+b)(c+d)}$, pentru orice $a, b, c, d \in [0, \infty)$.

b) Demonstrați că $\sqrt{a \cdot \log_{a+b} \sqrt{2a}} + \sqrt{b \cdot \log_{a+b} \sqrt{2b}} \leq \sqrt{a+b}$, pentru orice $a, b \in (\frac{1}{2}, \infty)$.

Soluție

a) $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{(a+b)(c+d)} \Leftrightarrow ac + bd + 2\sqrt{acbd} \leq ac + ad + bc + bd \dots\dots\dots (1 \text{ p})$

$2\sqrt{acbd} \leq ad + bc \Leftrightarrow \sqrt{(ad)(bc)} \leq \frac{ad+bc}{2} \text{ (inegalitatea mediilor)} \dots\dots\dots (2 \text{ p})$

b) $\sqrt{a \cdot \log_{a+b} \sqrt{2a}} + \sqrt{b \cdot \log_{a+b} \sqrt{2b}} \leq \sqrt{(a+b) \cdot (\log_{a+b} \sqrt{2a} + \log_{a+b} \sqrt{2b})} \dots\dots\dots (2 \text{ p})$

$\log_{a+b} \sqrt{2a} + \log_{a+b} \sqrt{2b} = \log_{a+b} (2\sqrt{ab})$, (1 p)

$\log_{a+b} (2\sqrt{ab}) \leq \log_{a+b} (a+b)$ (inegalitatea mediilor), iar $\log_{a+b} (a+b) = 1$. $\Rightarrow$

$(\log_{a+b} \sqrt{2a} + \log_{a+b} \sqrt{2b}) \leq 1 \dots\dots\dots (2 \text{ p})$

Deci $\sqrt{a \cdot \log_{a+b} \sqrt{2a}} + \sqrt{b \cdot \log_{a+b} \sqrt{2b}} \leq \sqrt{a+b}$, pentru orice $a, b \in (\frac{1}{2}, \infty)$ (1 p)

Oficiu (1 p)



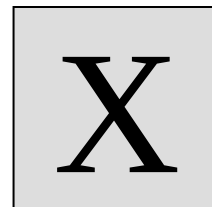
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GALAȚI
COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI” GALAȚI

Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”

3 decembrie 2024

ETAPA JUDEȚEANĂ

MATEMATICA -BAREM



Problema a II-a (10 puncte)

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $z_1^{n_1} = 1$, $z_2^{n_2} = 1$, unde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, $n_1, n_2 \geq 2$. Arătați
că $|(1 - z_1)(1 - z_2)| > \frac{4}{(n_1-1)(n_2-1)}$.

Soluție

Din $z_1^{n_1} = 1 \Leftrightarrow z_1^{n_1} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$(z_1 - 1)(z_1^{n_1-1} + z_1^{n_1-2} + \dots + 1) = 0 \dots\dots\dots (1 \text{ p})$$

$$z_1 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow z_1^{n_1-1} + z_1^{n_1-2} + \dots + 1 = 0 \mid + (-n_1) \dots\dots\dots (1 \text{ p})$$

$$\Leftrightarrow (z_1^{n_1-1} - 1) + (z_1^{n_1-2} - 1) + \dots + (z_1 - 1) = -n_1 \dots\dots\dots (1 \text{ p})$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - 1)[z_1^{n_1-2} + 2z_1^{n_1-3} + 3z_1^{n_1-4} + \dots + (n_1 - 2)z_1 + (n_1 - 1)] = -n_1 \dots\dots\dots (1 \text{ p})$$

Dar $(z_1 - 1) \neq 0$, trecând la modul , aplicând inegalitatea modului, știind că

$|z_1|^{n_1} = |z_2|^{n_2} = 1$, obținem:

$$|z_1^{n_1-2} + 2z_1^{n_1-3} + 3z_1^{n_1-4} + \dots + (n_1 - 2)z_1 + (n_1 - 1)| \leq |z_1^{n_1-2}| + 2|z_1^{n_1-3}| + \dots +$$
$$|n_1 - 1| = 1 + 2 + 3 + \dots + (n_1 - 1) = \frac{n_1(n_1-1)}{2} \dots\dots\dots (2 \text{ p})$$

$$|z_1 - 1| = \frac{n_1}{|z_1^{n_1-2} + 2z_1^{n_1-3} + 3z_1^{n_1-4} + \dots + (n_1-2)z_1 + (n_1-1)|} > \frac{n_1}{1+2+3+\dots+(n_1-1)} = \frac{2}{n_1-1}, n_1 \in \mathbb{N}^*;$$

$$n_1 \geq 2 \dots\dots\dots (1 \text{ p})$$

analog $|z_2 - 1| > \frac{2}{n_2-1}$, deci finalizarea

$$|(1 - z_1)(1 - z_2)| > \frac{4}{(n_1-1)(n_2-1)}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*, n_1, n_2 \geq 2 \dots\dots\dots (2 \text{ p})$$

Oficiu.....(1 p)