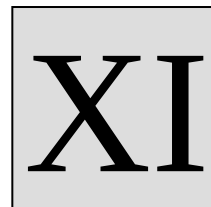




INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GALAȚI
COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI” GALAȚI
Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”
3 decembrie 2024
ETAPA JUDEȚEANĂ
MATEMATICA -BAREM



Problema I (10 puncte)

Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 2y \\ \frac{5y}{2} & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 5y^2 = 1 \right\}$

- a) Arătați că dacă $A, B \in M$ atunci $A \cdot B \in M$;
 b) Calculați A^n , unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție

a) Fie $A, B \in M$, $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 2y \\ \frac{5y}{2} & x \end{pmatrix}$, $x^2 - 5y^2 = 1$ și

$$B(z, t) = \begin{pmatrix} z & 2t \\ \frac{5t}{2} & z \end{pmatrix}, z^2 - 5t^2 = 1, x, y, z, t \in \mathbb{Z}$$

$$A(x, y) \cdot B(z, t) = \begin{pmatrix} x & 2y \\ \frac{5y}{2} & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 2t \\ \frac{5t}{2} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz + 5yt & 2(xt + yz) \\ \frac{5(xt + yz)}{2} & xz + 5yt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 2n \\ \frac{5n}{2} & m \end{pmatrix},$$

unde $m = xz + 5yt$ și $n = xt + yz$, $m, n \in \mathbb{Z}$ pentru orice $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$(1p)

$$m^2 - 5n^2 = 1 \Leftrightarrow (xz + 5yt)^2 - 5(xt + yz)^2 = 1 \Leftrightarrow (x^2 - 5y^2)(z^2 - 5t^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot 1 = 1 - \text{adevărat}.....(1p)$$

Finalizare(1 p)

b) $A(x, y) = xI_2 + yB$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$(1 p)

Calculăm $B^2 = 5I_2, B^3 = 5B, B^4 = 5^2I_2, \dots, B^{2k} = 5^kI_2, B^{2k+1} = 5^k B, k \in \mathbb{N}, \dots(1 p)$

$$A^n = \sum_{k=1}^n C_n^k x^{n-k} y^k B^k = I_2 (C_n^0 x^n + C_n^2 x^{n-2} y^2 \cdot 5 + \dots) + B \cdot (C_n^1 x^{n-1} \cdot y + C_n^3 x^{n-3} y^3 \cdot 5 + \dots) = \alpha_n \cdot I_2 + \beta_n \cdot B.....(2 p)$$

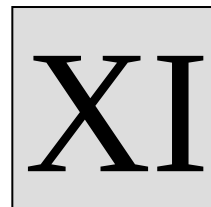
$$\text{Dar } (x + y\sqrt{5})^n = (C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y\sqrt{5} + \dots + C_n^2 x^{n-2} y^2 \cdot 5 + C_n^3 x^{n-3} y^3 \cdot 5\sqrt{5} + \dots + C_n^n y^n \sqrt{5}^n) = \alpha_n + \sqrt{5}\beta_n, \text{ iar } (x - y\sqrt{5})^n = \alpha_n - \sqrt{5}\beta_n(1 p)$$

$$\alpha_n = \frac{(x+y\sqrt{5})^n + (x-y\sqrt{5})^n}{2} \quad \text{și} \quad \beta_n = \frac{(x+y\sqrt{5})^n - (x-y\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}(1 p)$$

Oficiu.....(1 p)



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GALAȚI
COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI” GALAȚI
Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”
3 decembrie 2024
ETAPA JUDEȚEANĂ
MATEMATICA -BAREM



Problema a II-a (10 puncte)

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, unde $n \in \mathbb{N}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$.

Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} = 1$.

Soluție

$x_{n+1} - x_n = e^{-x_n} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)_{n \geq 0}$ strict crescător(1 p)

Presupunem prin R.A că $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit, deci $(x_n)_{n \geq 0}$ convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$,

Trecem la limită în relația de recurență $l - l = e^{-l} \Rightarrow e^{-l} = 0$, fals, deci presupunerea este falsă $\Rightarrow (x_n)_{n \geq 0}$ strict crescător și nemărginit $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$(2 p)

Aplicăm Lema Stolz-Cesaro $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-x_n}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{-x_n}}{n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{-x_n}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{x_n}}$ (3 p)

Aplicăm iar Lema S.C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{e^{x_{n+1}} - e^{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{e^{x_n}(e^{x_{n+1} - x_n} - 1)} \cdot \frac{1}{x_{n+1} - x_n},$

dar $x_{n+1} - x_n = e^{-x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x_n} \cdot e^{-x_n}} = 1$ deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{x_n}} = 1 \Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} = 1$(3 p)

Oficiu.....(1 p)