



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GALAȚI
COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI” GALAȚI

Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”

3 decembrie 2024

ETAPA JUDEȚEANĂ
MATEMATICA -BAREM

IX

Problema I (10 puncte)

Se consideră numerele reale pozitive a, b, c și d astfel încât $a + b + c + d = 4$. Arătați că

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{a+c+d} + \frac{c^2}{a+b+d} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}.$$

Soluție

Deoarece $a + b + c + d = 4$, relația din enunț scrie

$$\frac{a^2}{b+c+d} + a + \frac{b^2}{a+c+d} + b + \frac{c^2}{a+b+d} + c + \frac{d^2}{a+b+c} + d \geq \frac{16}{3}, \dots\dots\dots(1 \text{ p})$$

echivalentă cu

$$\frac{a(a+b+c+d)}{b+c+d} + \frac{b(a+b+c+d)}{a+c+d} + \frac{c(a+b+c+d)}{a+b+d} + \frac{d(a+b+c+d)}{a+b+c} \geq \frac{16}{3}, \dots\dots\dots(1 \text{ p})$$

care este echivalentă cu:

$$\frac{a}{4-a} + \frac{b}{4-b} + \frac{c}{4-c} + \frac{d}{4-d} \geq \frac{4}{3}. \dots\dots\dots(1 \text{ p})$$

Ultima relație se mai scrie $\frac{a}{4-a} + 1 + \frac{b}{4-b} + 1 + \frac{c}{4-c} + 1 + \frac{d}{4-d} + 1 \geq \frac{16}{3}$ și este echivalentă cu:

$$\frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c} + \frac{1}{4-d} \geq \frac{4}{3}. \dots\dots\dots(2 \text{ p})$$

Dacă $x, y, z, t > 0$, atunci $(x + y + z + t) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq 4^2 (*)$. $\dots\dots\dots(2 \text{ p})$

Din condiția $a + b + c + d = 4$ avem $4 - a, 4 - b, 4 - c$ și $4 - d$ pozitive.

Înlocuind în relația (*) $x = 4 - a, y = 4 - b, z = 4 - c$ și $t = 4 - d$ obținem

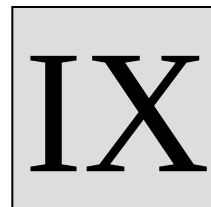
$$\frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c} + \frac{1}{4-d} \geq \frac{4}{3} \text{ despre care am arătat că este echivalentă cu relația din}$$

enunț. $\dots\dots\dots(2 \text{ p})$

Oficiu. $\dots\dots\dots(1 \text{ p})$



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GALAȚI
COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI” GALAȚI
Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”
3 decembrie 2024
ETAPA JUDEȚEANĂ
MATEMATICA -BAREM



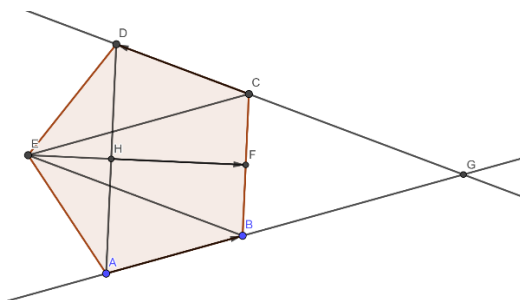
Problema a II-a (10 puncte)

Fie $ABCDE$ un pentagon regulat, F mijlocul laturii BC , G intersecția dintre AB și CD și H intersecția dintre EF și AD .

a) Arătați că F este mijlocul segmentului EG .

b) Determinați numerele reale x și y astfel încât $\overrightarrow{HF} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{CD}$.

(GM-9-2024)



Soluție

a) $\triangle GCB$ este isoscel ($\angle GCB = \angle GBC = 72^\circ$) $\Rightarrow GF$ –bisectoarea $\angle CGB$ (1 p)

$\triangle GDE \equiv \triangle GAE$ (L.U.L) $\Rightarrow GE$ -bisectoarea $\angle DGA$(1 p)

Rezultă că punctele G, F, E, H sunt coliniare.....(1 p)

$\angle DCE = \angle DGA = 36^\circ \Rightarrow CE \parallel GB$(1 p)

Analog, $CG \parallel EB \Rightarrow CGBE$ -paralelogram $\Rightarrow F$ -mijlocul segmentului EG(1 p)

b) $\triangle AED$ -isoscel, EH -bisectoare (conform punctului a)

$\Rightarrow H$ -mijlocul segmentului AD(1 p)

$$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$$

$$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \dots\dots\dots(1 p)$$

Adunând cele două relații, $\Rightarrow 2\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{HF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{CD}$ (1 p)

Rezultă că $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$(1 p)

Oficiu.....(1 p)