

EXEMPLE DE PROBLEME CU CARACTER APLICATIV LA DISCIPLINA MATEMATICĂ

DETERMINAREA DRUMULUI DE COST MINIM –

ALGORITMUL LUI ROY-FLOYD

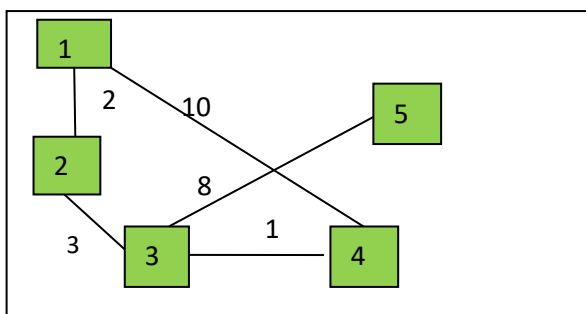
Algoritmul Roy-Floyd este folosit în diverse domenii, de la controlul avioanelor de pe un anumit aeroport până la jocuri informatice, rolul principal fiind acela de găsire a drumului de cost minim între un obiect principal și o țintă anume.

Fie $G=(V, E)$ un graf neorientat, unde V are n elemente (n noduri) și E are m elemente (m muchii) memorat prin matricea ponderilor. Se cere ca pentru două noduri x, y să se determine lungimea minimă a drumului de la x la y .

Prezentarea algoritmului:

-se generează matricea costurilor:

$$a[i,j]= \begin{cases} c, & \text{dacă există un muchie/arc de cost } c>0, \text{ între } i \text{ și } j; \\ 0, & \text{dacă } i=j; \\ +\infty, & \text{dacă nu există muchie/arc între nodurile } i \text{ și } j. \end{cases}$$



0	2	∞	10	∞
2	0	3	∞	∞
∞	3	0	1	8
10	∞	1	0	∞
∞	∞	8	∞	0

Unde ∞ reprezintă plus infinit.

Inițial în matricea costurilor, pentru nodurile 1 și 4 va reține 10. Se observă că drumul 1,2,3,4 determină o sumă a costurilor mai mică: $2+3+1=6$. Lungimea minimă a drumului de la 1 la 4 este 6.

-se încearcă pentru oricare pereche de noduri i, j să se obțină drumuri mai scurte prin noduri intermediare k ($k \in 1 \dots n$). Acest lucru se determină comparând "lungimea" drumului $a[i,j]$ cu lungimea drumului care trece prin k și dacă: $a[i,j] > a[i,k]+a[k,j]$ atunci se atribuie: $a[i,j] = a[i,k]+a[k,j]$. Nodurile ale căror costuri vor fi modificate sunt următoarele întrucât între ele există costuri mai mici.

Nod inițial	Nod final	Cost inițial	Cost final	Calea
1	3	∞	5	1-2-3
1	4	10	6	1-2-3-4
1	5	∞	13	1-2-3-5
2	4	∞	4	2-3-4
2	5	∞	11	2-3-5
4	5	∞	9	4-3-5

Astfel matricea costurilor va arăta în partea dreaptă.

0	2	5	6	13
2	0	3	4	11
5	3	0	1	8
6	4	1	0	9
13	11	8	9	0

Modificările în matricea costurilor se fac după cum urmează prin algoritmul Roy-Floyd.

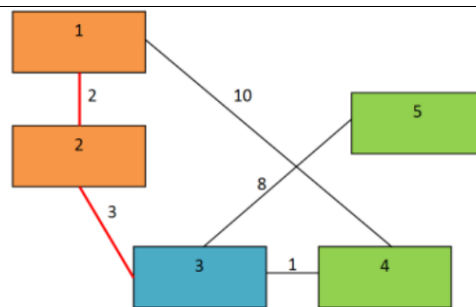
0	2	∞	10	∞
2	0	3	∞	∞
∞	3	0	1	8
10	∞	1	0	∞
∞	∞	8	∞	0

Inițial matricea este completată cu costurile inițiale. ∞ indică un drum maxim care încă nu există . Se începe cu nodul 1 ca și vizitat.

0	2	∞	10	∞
2	0	3	12	∞
∞	3	0	1	8
10	12	1	0	∞
∞	∞	8	∞	0

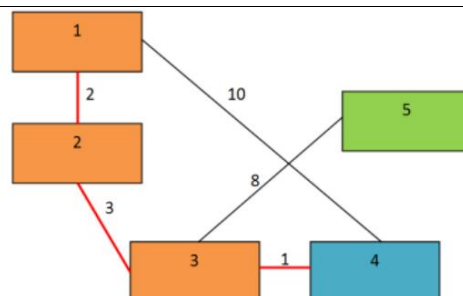
Cum nici un nod în afară de 1 nu a fost vizitat se calculează drumul minim dintre nodul următor în matrice, adică 2, și celelalte noduri doar prin noduri vizitate. Astfel între nodul 2 și 4 avem lungimea de 2 +10, adică drumul 2,1,4.Se observă că înspre nodul 5 nu există momentan drum întrucât nu s-a vizitat nodul 3, care este intermediar între ele.

0	2	5	10	∞
2	0	3	12	∞
5	3	0	1	8
10	12	1	0	∞
∞	∞	8	∞	0



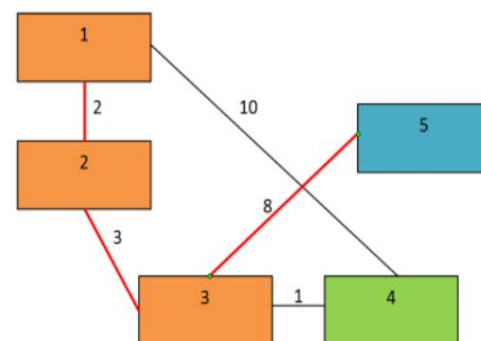
Acum că nodul 2 a fost vizitat se poate calcula un drum de la nodul 1 la nodul 3 prin nodul 2, adică $2+3=5$. De la 1 la 5 încă nu există drum. Nodul 3 nefiind vizitat.

0	2	5	6	∞
2	0	3	12	∞
5	3	0	1	8
6	12	1	0	∞
∞	∞	8	∞	0



Nodul 3 a fost vizitat se poate calcula un drum de cost minim prin nodurile 2 și 3, adică $2+3+1=6$, care este mai mic decât drumul direct de valoare 10. Astfel în matrice se plasează valoarea 6 ca drum între nodurile 1 și 4.

0	2	5	6	13
2	0	3	12	∞
5	3	0	1	8
6	12	1	0	∞
13	∞	8	∞	0



Drumul de la nodul 1 la nodul 5 se poate calcula prin nodurile 2 și 3 și are valoarea $2+3+8=13$.

0	2	5	6	13
2	0	3	4	∞
5	3	0	1	8
6	4	1	0	∞
13	∞	8	∞	0

Între nodul 2 și 4 se poate calcula acum un nou drum prin nodul intermediar 3 cu valoarea $3+1=4<12$.

0	2	5	6	13
2	0	3	4	11
5	3	0	1	8
6	4	1	0	∞
13	11	8	∞	0

Între nodul 2 și 5 se poate calcula acum un drum prin nodul intermediar 3 cu valoarea $3+8=11$.

0	2	5	6	13
2	0	3	4	11
5	3	0	1	8
6	4	1	0	9
13	11	8	9	0

Între nodul 4 și 5 există drum prin nodul intermediar 3 de valoare $1+8=9$.

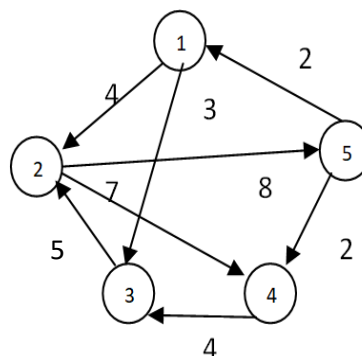
0	2	5	6	13
2	0	3	12	11
5	3	0	1	8
6	12	1	0	9
13	11	8	9	0

Nu mai există drumuri mai mici, deci matricea drumurilor optime este completă. Se observă că este simetrică față de diagonala principală pentru grafurile neorientate.

De exemplu, pentru un drum de la nodul 1 la nodul 4 avem o cale inițial, calea directă cu costul 10, dar tot odată mai există o cale prin nodurile intermediare cu costul mai mic de valoare 6.

Matricea costurilor minimă pentru graful orientat de mai jos:

	1	2	3	4	5
1	0	4	3	∞	∞
2	∞	0	∞	7	8
3	∞	5	0	∞	∞
4	∞	∞	4	0	∞
5	2	∞	∞	2	0



Pentru graful orientat matricea costurilor suferă următoarele transformări:

k=1

	1	2	3	4	5
1	0	4	3	∞	∞
2	∞	0	∞	7	8
3	∞	5	0	∞	∞
4	∞	∞	4	0	∞
5	2	6	5	2	0

k=2

	1	2	3	4	5
1	0	4	3	11	12
2	∞	0	∞	7	8
3	∞	5	0	12	13
4	∞	∞	4	0	∞
5	2	6	5	2	0

k=3

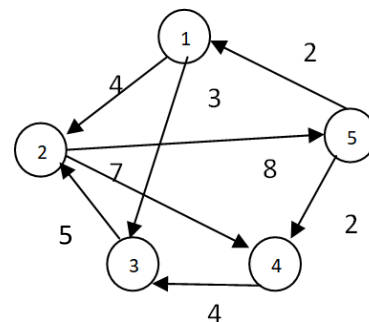
	1	2	3	4	5
1	0	4	3	11	12
2	∞	0	∞	7	8
3	∞	5	0	12	13
4	∞	9	4	0	17
5	2	6	5	2	0

k=4

	1	2	3	4	5
1	0	4	3	11	12
2	∞	0	11	7	8
3	∞	5	0	12	13
4	∞	9	4	0	17
5	2	6	5	2	0

k=5

	1	2	3	4	5
1	0	4	3	11	12
2	10	0	11	7	8
3	15	5	0	12	13
4	19	9	4	0	17
5	2	6	5	2	0



Algoritmii pentru determinarea drumului de cost minim au diverse aplicații în practică cum ar fi: programarea autobuzelor școlare, traseele autobuzelor în vederea economisirii combustibilului, colectarea gunoiului, programarea operațiilor tehnologice în realizarea produselor, etc.

Întocmit:

Prof. Diaconu Mioara