

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa locală - 15 februarie 2025****Clasa a -VII-a****Barem de notare și evaluare**

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

**Problema 1.**

Din inegalitatea mediilor  $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$ , unde  $x, y$  numere reale pozitive,

obținem  $\frac{x+y}{\sqrt{x \cdot y}} \geq 2$ , (1) .....2p

Utilizând inegalitatea (1), obținem:  $\frac{1+2}{\sqrt{1 \cdot 2}} \geq 2$ ,  $\frac{2 \cdot (2+3)}{\sqrt{2 \cdot 3}} \geq 2 \cdot 2$ ,  $\frac{3 \cdot (3+4)}{\sqrt{3 \cdot 4}} \geq 3 \cdot 2, \dots,$

$\frac{2024 \cdot (2024+2025)}{\sqrt{2024 \cdot 2025}} \geq 2024 \cdot 2$  .....2p

$$A = \frac{1+2}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{2 \cdot (2+3)}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{3 \cdot (3+4)}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \frac{4 \cdot (4+5)}{\sqrt{4 \cdot 5}} + \dots + \frac{2024 \cdot (2024+2025)}{\sqrt{2024 \cdot 2025}} \geq$$

$$\geq 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + \dots + 2024 \cdot 2$$
 .....1p

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + \dots + 2024 \cdot 2 = 2 \cdot \frac{2024 \cdot 2025}{2} > 2024^2$$
 .....1p

$$\text{Deci } A = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{10}{\sqrt{6}} + \frac{21}{\sqrt{12}} + \frac{36}{\sqrt{20}} + \dots + \frac{2024 \cdot 4049}{\sqrt{2024 \cdot 2025}} > 2024^2$$
 .....1p

**Problema 2.**

a)  $6 < \sqrt{42} < \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots \sqrt{42}}}$ , dar  $\sqrt{42} < \sqrt{49} = 7$  .....1p

$$\text{obținem } \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots \sqrt{42}}} < \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots \sqrt{49}}} = \dots = \sqrt{42 + 7} = 7$$

$$\Rightarrow 6 < a < 7 \Rightarrow [a] = 6$$
 .....2p

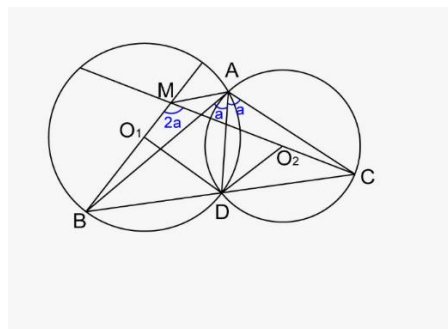
b)  $b = 2(4 + \sqrt{3}) - |3 - 2\sqrt{3}| - (3^{82} - 2^{123} + 2^{123}) : 3^{80}$  .....1p

$$\Rightarrow b = 8 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3 - 3^2 \Rightarrow b = 2$$
 .....1p

$$\sqrt{\frac{x \cdot [a] - 3}{x \cdot b + 5}} = \sqrt{\frac{6x - 3}{2x + 5}} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{6x - 3}{2x + 5} = k^2, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{6x - 3}{2x + 5} = 3 - \frac{18}{2x + 5} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{18}{2x + 5} \in \mathbb{Z}$$
 .....1p

$\Rightarrow 2x + 5 \in \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-7, -4, -3, -2, -1, 2\}$ ,  
dar cum  $3 - \frac{18}{2x+5} = k^2$ , vom obține  $x \in \{-4, 2\}$ . .....1p

### Problema 3.



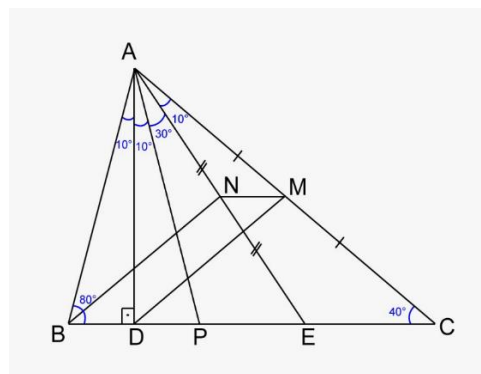
Notăm  $\angle BAC = 2a$ , cum AD bisectoarea  $\angle BAC \Rightarrow \angle BAD = \angle DAC = a \Rightarrow \widehat{DB} = \widehat{DC} = 2a$  .....2p

$\angle BO_1D = \angle CO_2D = 2a$ , iar  $\triangle BO_1D$  și  $\triangle CO_2D$  sunt triunghiuri isoscele,  $BO_1 = O_1D$  și  $DO_2 = O_2C \Rightarrow$   
 $\angle O_1BD = \angle O_2CD = 90^\circ - a$  .....2p

cum  $BO_1 \cap CO_2 = \{M\} \Rightarrow \triangle BMC$  isoscel,  $BM = MC$  .....1p

Cum  $\triangle BMC$  isoscel,  $\angle BMC = 2a = \angle BAC \Rightarrow$  patrulaterul MACB este inscripabil,  
deci A, B, C și M sunt puncte conciclice. ....2p

### Problema 4.



a)  $\angle ABC = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$ , dar  $\angle DAB = 10^\circ$   
 $\Rightarrow \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow AD$  – înălțime și mediană în  $\triangle ABP \Rightarrow AP = AB$  .....1p

În  $\triangle APC$ ,  $\angle APC = 100^\circ$  și  $\angle ACB = 40^\circ \Rightarrow \angle PAC = 40^\circ \Rightarrow \triangle APC$  isoscel  $\Rightarrow AP = PC$ , deci  $AP = AB = PC$  .....1p

În  $\triangle ABE$ ,  $\angle ABC = 80^\circ$ ,  $\angle BAE = 50^\circ \Rightarrow \angle BEA = 50^\circ \Rightarrow \triangle ABE$  isoscel  $\Rightarrow AB = BE$ , deci  $AP = AB = PC = BE$  .....1p

În  $\triangle ACE$ , MN linie mijlocie  $\Rightarrow MN \parallel CE \Rightarrow MN \parallel BD$  și  $CE = 2MN$ ,  
cum  $PC = BE \Rightarrow PB = CE \Rightarrow 2DB = 2MN \Rightarrow DB = MN$  deci BDMN paralelogram .....1p

b) în  $\triangle ADC$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ , MD –mediană  $\Rightarrow DM = MC$  .....1p

dar  $DM = BN \Rightarrow BN = MC$ , cum  $MN \parallel BD \Rightarrow BCMN$  trapez isoscel  $\Rightarrow BM = NC$ . ....2p