

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numărul elementelor mulțimii $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 7 + \sqrt{7}\}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care vârful parabolei asociate funcției f are ordonata strict mai mare decât 0.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3} = x-3$.
- 5p** 4. Determinați numărul submulțimilor cu cel mult 2 elemente ale unei mulțimi cu 12 elemente.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$ și $B(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a paralelei prin A la OB cu paralela prin B la OA .
- 5p** 6. Arătați că $\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg} x} = 1$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 2a & 0 \\ -a & 1+2a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 4$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă a , b și c sunt numere reale pentru care $A(a) \cdot A(b) \cdot A(c) = A(0)$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c) = 1$.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 5p** a) Arătați că $3 * 4 = 5$.
- 5p** b) Determinați $x \in M$ pentru care $x * \sqrt{5} < x + 1$.
- 5p** c) Demonstrați că există o infinitate de perechi (m, n) de numere naturale nenule, pentru care numerele m , n și $m * n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Demonstrați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- 5p** c) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{3}$.

- | | |
|-----------|---|
| 5p | b) Calculați $\int_0^1 e^x f(x) dx$. |
| 5p | c) Arătați că $\int_{-1}^1 x \ln(f(x)) dx = 2 \ln 2 - 1$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $n = (1 + 6i)^2 + (3 - 2i)^2$ este întreg negativ, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax$, unde a este număr real astfel încât $f(1) = f(5)$. Arătați că $f(2) = f(4)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x^2 - 2) = 2\log_3(x + 1)$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu suma dintre cifra sutelor și cifra zecilor.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(-4, 3)$ și C , astfel încât $AOBC$ este paralelogram. Arătați că triunghiul ACB este dreptunghic isoscel.
- 5p 6. Determinați $x \in (0, \pi)$ pentru care $2\sin x \sin(\pi - x) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 1$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $A(a)A(1) = A(1)A(a)$.
- 5p c) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ are rangul doi.
2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$.
- 5p a) Arătați că $\hat{3} \circ \hat{3} = \hat{3}$.
- 5p b) Arătați că $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p c) Demonstrați că funcția $f: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$, $f(x) = \hat{4} \circ x$ este bijectivă.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{-4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$, $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul funcției f intersectează axa Oy .
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(2) + f(4) + f(6) + \dots + f(2n))^n$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-2}{x^2+4}$.

5p a) Arătați că $\int_0^2 (x^2+4)f(x)dx = 0$.

5p b) Calculați $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)dx$.

5p c) Demonstrați că $\int_1^x f(t)dt \geq 0$, pentru orice număr real x .

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 1 + i$. Arătați că $z^2 - z - i = -1$.
- 5p** 2. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care ecuația $x^2 - 3x + 3 - n = 0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(25x) + \log_x 5 = 4$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 sau cu 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$, $B(4, 2)$ și $C(3, 0)$. Calculați aria triunghiului ABC .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x - \sin(\pi - x) + \cos x + \cos(\pi - x) + \operatorname{tg} 2x$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.
Arătați că $E\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A + I_3) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A \cdot A \cdot A = O_3$.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = X \cdot A$, atunci există numerele reale a , b și c , astfel încât $X = aI_3 + bA + cA \cdot A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = |x - y|$.
- 5p** a) Arătați că $(5 * 2) * 1 = 2$.
- 5p** b) Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
- 5p** c) Demonstrați că $(a * b) + (b * c) \geq a * c$, pentru orice numere reale a , b și c .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $x - 1 \leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 f^2(x) dx = 4$.

5p | **b)** Calculați $\int_0^1 \ln(f(x)) dx$.

5p | **c)** Demonstrați că există un singur număr real x , $x \in [0, +\infty)$, pentru care $\int_0^x e^{f(t)} dt = 2021$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră un număr complex z care are proprietatea $z^2 = 1 - i$. Arătați că $z^4 + 2i = 0$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x) > 1$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x+2) + \log_5(2x-1) = 2$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 9.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(3,2)$ și $C(4,5)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
- 5p** 6. Determinați $x \in (0,1)$ pentru care $4\cos x \cos(\pi - x) + 3 = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 6$.
- 5p** b) Arătați că $A \cdot B + B = B \cdot A$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x și y , știind că $(x+1)A \cdot B + (y-2)B \cdot A = B \cdot B \cdot B$.
2. Pe mulțimea numerelor naturale nenule se definește legea de compoziție $x * y = x^y$.
- 5p** a) Arătați că $2 * 4 = 4 * 2$.
- 5p** b) Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” **nu** este comutativă.
- 5p** c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $(2 * 2) * n < 64$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln(x^2 + x + 1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 0$.
- 5p** b) Calculați $\int_0^1 e^x |f(x)| dx$.
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f^n(x) dx$. Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul complex z , pentru care $z - 2\bar{z} = -2 + 6i$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + m$, unde m este număr real pozitiv. Determinați numărul real pozitiv m pentru care numerele $f(0)$, $f(1)$ și $f(2)$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_5(x-1) = \log_5(3x+1)$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A .
- 5p 5. Se consideră punctele A , B , C și D , astfel încât $2\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AC}$. Demonstrați că $\overline{AB} = \overline{DC}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu măsura unghiului A de 30° . Arătați că lungimea laturii BC este egală cu lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(m) + A(-m)) = 8$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Determinați numărul real m pentru care are loc egalitatea $A(m) \cdot A(m) = A(0)$.
- 5p c) Demonstrați că $A(1) - A(2) + A(3) - A(4) + \dots + A(2n-1) - A(2n) = n(A(-1) - A(0))$, pentru orice număr natural nenul n .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + 4xy + y^2$.
- 5p a) Arătați că $\frac{1}{2} * \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $(x * (-x)) * ((-x) * x) = 24x$.
- 5p c) Demonstrați că $x * \frac{1}{x} \geq 6$, pentru orice număr real nenul x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(1-x)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{2x}$.
- 5p c) Demonstrați că $\frac{e^x+2}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{e^{2x}+2}$, pentru orice număr real x .

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - \ln x$.

5p a) Arătați că $\int_1^{\sqrt{2}} (f(x) + \ln x) dx = \frac{3}{4}$.

5p b) Calculați $\int_1^e x(x^3 - f(x)) dx$.

5p c) Arătați că $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} f(\sqrt{x}) dx = \frac{2e^3 - 5}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numărul elementelor mulțimii $M = \{n \in \mathbb{N} \mid 2n + 1 < 10\}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat pe axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x + \sqrt{x - 5} = 7$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să **nu** fie multiplu de 5.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 4)$ și $B(-1, 3)$. Determinați coordonatele punctului C astfel încât $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB = 4$, $AC = 5$ și aria egală cu 6. Calculați cosinusul unghiului A .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a+1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x + (a+1)y + az = 6a + 3 \\ x + y + (a+1)z = 4a + 7 \\ 2x + ay + z = 2a + 6 \end{cases}$$
, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(a)) = 2(a^2 + 1)$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $A(a) \cdot A(0) = A(0) \cdot A(a)$.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluția sistemului de ecuații, atunci x_0 , y_0 și z_0 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{2(x+y)}{xy+2}$.
- 5p** a) Arătați că $x * 0 = x$, pentru orice $x \in M$.
- 5p** b) Arătați că $x * y < 2$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule pentru care $m * n$ este număr natural.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = e^x(x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$.
- 5p** c) Demonstrați că graficul funcției f intersectează orice dreaptă paralelă cu axa Ox în cel mult un punct.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 2$.

- 5p** | **b)** Calculați $\int_0^1 x^2 (f(x))^3 dx$.
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \ln(f(t)) dt = +\infty$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați produsul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt[3]{7} < x \leq \log_2 21\}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta d de ecuație $y = 5x + 2$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 9^x - 3^{2x} - 3 = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele numere prime distincte.
- 5p** 5. Se consideră punctul M în planul triunghiului ABC astfel încât $2\overline{MB} - \overline{MC} = \overline{AB}$. Arătați că patrulaterul $AMBC$ este paralelogram.
- 5p** 6. Calculați $\operatorname{tg} x$, știind că $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x = -\frac{8}{17}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -a \\ 2-a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (a+1)x + y + az = -5 \\ x - y - az = 10 \\ (2-a)x + y + z = 1-a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2)) = 4$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care sistemul de ecuații **nu** este compatibil determinat.
- 5p** c) Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0) și x_0 este număr întreg.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = x + y - \frac{xy}{5}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 5 = 5$.
- 5p** b) Determinați numărul real x , $x \geq 0$, pentru care $\sqrt{x} * \sqrt{x} = 5$.
- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui a , $a \neq 5$, pentru care simetricul lui a în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” este strict mai mic decât 0.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\ln(x+1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 1 + \ln(x+1) - \frac{2}{x+1}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.
- 5p** c) Demonstrați că orice două drepte distincte, tangente la graficul funcției f , sunt concurente.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x+1}}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)dx = 7$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f^2(x)dx$.

5p c) Știind că $F : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2(x+1)\sqrt{x+1} - 6\sqrt{x+1} + 4$ este o primitivă a funcției f ,
arătați că $\int_0^3 f(x)F(x)dx = 32$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} > \frac{3}{4}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 18$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției $f \circ f$ cu axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3-x} - 2^{2-x} + 2^{5-x} = 9$.
- 5p** 4. Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, unde $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a, 1)$ și $B(-2, 5)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că mijlocul segmentului AB aparține dreptei de ecuație $y = 2x + 3$.
- 5p** 6. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC , știind că $\operatorname{tg} C = 1$ și că triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 3.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(3)) = 10$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3.
- 5p** c) Arătați că, pentru orice număr natural m , $m \geq 2$, inversa matricei $A(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea $M = (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{xy - 4}{x + y - 4}$.
- 5p** a) Arătați că $8 \circ 8 = 5$.
- 5p** b) Arătați că $(x + 2) \circ (y + 2) > (x + y) \circ 4$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă $x \in M$ și n este număr natural, $n \geq 2$, astfel încât $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x} = 2^n - \frac{1}{2^n}$, atunci x este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x - 3) - 2\ln(x^2 - 9)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(1-x)}{x^2 - 9}$, $x \in (3, +\infty)$.
- 5p** b) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
- 5p** c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 3} ((x - 3) f(x)) = 0$.

2. Se consideră funcția $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

5p a) Arătați că $\int_1^{\frac{3}{2}} \left(f(x) - \frac{x^2}{x^2 - 4} \right) dx = \frac{5}{8}$.

5p b) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + f(-x)) dx = 4(1 - \ln 3)$.

5p c) Determinați $a \in (0, \sqrt{3})$, pentru care $\int_a^{\sqrt{3}} \sqrt{x - f(x)} dx = \sqrt{3} - 1$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați modulul numărului complex $z = (2 + 3i)(2 - 3i) - (9 - 3i)$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 20$. Calculați $(g \circ f)(2)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-5} = \frac{1}{16}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.
- 5p** 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 4$, $BC = 6$ și măsura unghiului ABC de 120° . Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 12$, $AC = 16$ și $BC = 20$. Arătați că $\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2a-1)x + 2y + z = a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(4)) = 5$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.
- 5p** c) Pentru $a = 3$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2 = x_0 + y_0$.
2. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt{x^{\log_3 y}}$.
- 5p** a) Arătați că $4 * 3 = 2$.
- 5p** b) Arătați că $e = 9$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Determinați $x \in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 4) + 3$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 2x(2x^2 - 13)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{f(x)-3} = \frac{1}{30}$.
- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \arctg x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\arctg x} dx = 3$.

- | | |
|-----------|---|
| 5p | b) Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$. |
| 5p | c) Demonstrați că $\int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\sqrt[3]{(6-\sqrt{2})^3} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 5$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2mx - 6$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că graficul funcției f intersectează axa Ox într-un punct în care și graficul funcției g intersectează axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - 4x + 12) = \log_3 27$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 3.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4, 0)$, $B(-1, 3)$ și $C(1, m)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în B .
- 5p 6. Arătați că $\sin \frac{25\pi}{6} + \cos \frac{23\pi}{3} = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+b)y + z = 0 \\ x + y + (1+c)z = 0 \end{cases}$ unde a , b și c sunt numere reale nenule.
- 5p a) Arătați că $\det(A(-2, 0, 2)) = -4$.
- 5p b) Arătați că, dacă $abc + ab + ac + bc \neq 0$, atunci matricea $A(a, b, c)$ este inversabilă.
- 5p c) Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații admite și soluții diferite de soluția $(0, 0, 0)$, atunci numărul $N = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ este întreg.
2. Pe mulțimea $G = (0, 2)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}$ și se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, 2)$, $f(x) = \frac{2}{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 1 = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $f(x) * f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $f\left(\frac{1}{2}\right) * f\left(\frac{2}{3}\right) * f\left(\frac{3}{4}\right) * \dots * f\left(\frac{2020}{2021}\right) = \frac{2n}{n+1}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 3$.
- 5p a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.
- 5p b) Arătați că funcția f este convexă pe $(0, 1)$.

- 5p** c) Demonstrați că $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.
- 5p** a) Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 1$.
- 5p** b) Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.
- 5p** c) Demonstrați că $I_n \leq \ln 2$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați partea întreagă a numărului $a = \frac{4}{\sqrt{2}}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m , știind că axa Ox este tangentă la graficul funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{(x-1)(x+2)} = (x+2)\sqrt{x-1}$.
- 5p** 4. Determinați numărul natural n , $n \geq 2$, știind că mulțimea $\{3, 4, 5, \dots, n+2\}$ are exact 55 de submulțimi cu 2 elemente.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 , de ecuații $2x - y + 1 = 0$, respectiv $x + y + 2 = 0$. Determinați ecuația dreptei d care este perpendiculară pe dreapta d_2 și trece prin punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2 .
- 5p** 6. Arătați că $\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m, x) = \begin{pmatrix} 2 & -x & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 3 & -2 & x \end{pmatrix}$, unde m și x sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(4, 2)) = 0$.
- 5p** b) Determinați rangul matricei $A(2, 1)$.
- 5p** c) Determinați perechile de numere naturale nenule și distincte (n, p) pentru care $\det(A(3, n)) = \det(A(3, p))$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = \frac{xy}{3} - x - y + 6$.
- 5p** a) Arătați că $(-1) * 3 = 3$.
- 5p** b) Arătați că $x * (y + z - 3) = (x * y) + (x * z) - 3$, pentru orice numere reale x, y și z .
- 5p** c) Determinați numerele reale x , $x \neq 3$ pentru care $(x * (x + x' - 3)) + (x' * (2x - 3)) = 42$, unde x' este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - ax$, unde a este număr real.
- 5p** a) Pentru $a = 0$, arătați că $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = \sqrt{2}$, situat pe graficul funcției f , este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^3 \frac{x f(x)}{\operatorname{arctg} x} dx = 20$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.
- 5p c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^n(x) dx = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 0$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax - 5$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctul $M(1, 2)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2 + 1) = \log_4 x + \log_4(x + 1)$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 și cu 5.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3, 4)$, $N(0, 1)$ și $P(3, 0)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul P și este paralelă cu dreapta MN .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în C . Arătați că $\operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ 3a & 0 & 2-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 8$.
- 5p** b) Determinați matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB = A(a) - 2I_3$, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n) \cdot A(-n)) > 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
- 5p** a) Arătați că $2 * 0 = 2$.
- 5p** b) Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a \leq b$, atunci $a * b = b$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $(2x) * (x^2 + 1) * (-2x) = 10$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 3}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = a$ are soluție.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 3}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 (x^2 + x + 3) f(x) dx = 2$.

- 5p** **b)** Arătați că $\int_1^2 g(x) dx = \ln \frac{9}{5}$, unde $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x} \cdot f(x)$.
- 5p** **c)** Se consideră numerele reale a și b , cu $0 \leq a < b$. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați media aritmetică a numerelor reale $a = 2021 - \sqrt{2}$ și $b = 2021 + \sqrt{2}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(1, m)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(\sqrt{x} + 3) + \log_3(\sqrt{x} - 3) = 2$.
- 5p** 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 16 submulțimi.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3, 0)$, $N(8, 3)$ și $P(6, 3)$. Determinați coordonatele punctului Q , știind că $\overline{MN} + \overline{MP} = \overline{MQ}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $\sin 2A \cdot \cos A = \sin A$. Arătați că $A = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, $\det(A(a) + (A(a))^{-1}) \geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - m(x + y) + m(m + 1)$, unde $m \in (0, +\infty)$.
- 5p** a) Pentru $m = 1$, arătați că $2 \circ 2 = 2$.
- 5p** b) Demonstrați că, dacă $2 \circ 1 = 5$, atunci $2 \circ 5 = 1$.
- 5p** c) Determinați numărul real x , știind că $(mx^3) \circ (-mx^2) = m$, pentru orice $m \in (0, +\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2 - 4 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{2x}{x^4 + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \frac{11}{5}$.

5p b) Se consideră $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f . Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

5p c) Se consideră funcția $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $G(0) = 0$. Arătați că $\int_0^1 xG(x) dx = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $N = \log_2 6 - 2\log_2 3 + \log_2 24$ este natural.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 2$. Arătați că dreapta de ecuație $y = 2$ intersectează graficul funcției f în două puncte distincte.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{3x - 1}$.
- 5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A , știind că mulțimea A are exact 15 submulțimi cu două elemente.
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele M , N și P mijloacele segmentelor BC , BM , respectiv CM . Arătați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
- 5p 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$, unde a , b și c sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0, 1, 2)) = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(a, b, c)) = (b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a , b și c .
- 5p c) Demonstrați că, dacă m , n și p sunt numere naturale, cu $m < n < p$, astfel încât determinantul matricei $A(m, n, p)$ este număr prim, atunci numerele m , n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. În mulțimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + \hat{2}X + b$, unde $a, b \in \mathbb{Z}_3$.
- 5p a) Pentru $a = \hat{1}$ și $b = \hat{2}$, arătați că $f(\hat{0}) + f(\hat{2}) = \hat{2}$.
- 5p b) Determinați perechile (a, b) , cu $a, b \in \mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X + \hat{2}$.
- 5p c) Arătați că, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$, există $x, y \in \mathbb{Z}_3$, cu $x \neq y$, astfel încât $f(x) = f(y)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 2x + 2)}{(e^x + 2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2+4x+5} dx = 7$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 (f^2(x) - 4) dx = 4 \ln 2$.

5p c) Se consideră numerele reale a și b , cu $0 \leq a < b$. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_2 = 2$ și $b_4 = 4$. Determinați b_6 .
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat pe dreapta $y = 3x$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$.
- 5p** 4. Determinați numărul de numere naturale de trei cifre care au exact două cifre egale.
- 5p** 5. Segmentele AB și $A'B'$ au același mijloc. Demonstrați că $\overline{AB'} + \overline{BA'} = \vec{0}$.
- 5p** 6. Demonstrați că, în orice triunghi ABC , are loc relația $AB + AC + BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b \\ y + z = 1 \end{cases}$$
 și matricea $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(X(0,1)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice numere reale distincte a și b , sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 3$, pentru orice număr real a .
2. Pe mulțimea $M = (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = (x-1)^{\log_3(y-1)} + 1$.
- 5p** a) Arătați că $5 * 10 = 17$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Determinați $x \in M$ pentru care $x * x * x = x * x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^{2x} + 2x^3}{\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f , este paralelă cu dreapta de ecuație $x - \sqrt{3}y = 0$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 3} \right)$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 \left(2f(x) + \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx = \frac{\pi}{4}$.
- 5p** b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este strict crescătoare.

- 5p** c) Arătați că, pentru orice numere reale a și b , cu $a < b$, $\int_a^b f(x)F^2(x)dx > 0$, pentru orice primitivă F a funcției f .

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați modulul numărului complex $z = (2 + 3i)(2 - 3i) - (9 - 3i)$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 20$. Calculați $(g \circ f)(2)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-5} = \frac{1}{16}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.
- 5p 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 4$, $BC = 6$ și măsura unghiului ABC de 120° . Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 12$, $AC = 16$ și $BC = 20$. Arătați că $\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2a-1)x + 2y + z = a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(4)) = 5$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.
- 5p c) Pentru $a = 3$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2 = x_0 + y_0$.
2. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt{x^{\log_3 y}}$.
- 5p a) Arătați că $4 * 3 = 2$.
- 5p b) Arătați că $e = 9$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați $x \in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 4) + 3$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 2x(2x^2 - 13)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{f(x)-3} = \frac{1}{30}$.
- 5p c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \arctg x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\arctg x} dx = 3$.

- 5p** | **b)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$.
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$.