

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $a = 3 + 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})^2$ este întreg.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x^2 + 2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+4x+2} = 64 \cdot 2^x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A = \{-2, -1, 1, 3, 4\}$, acesta să verifice inegalitatea $\sqrt{a^2 - 2a + 1} \geq 3$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $MNPQ$ cu $M(2,3)$, $N(5,4)$ și $P(4,0)$. Determinați ecuația dreptei MQ .
- 5p 6. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 5. Arătați că $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{1000}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1,0)) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că, dacă $a \in (-\infty, 0)$ și $b \in (0, +\infty)$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1,3) \cdot X = A(2,1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy - (x + y) + \frac{2}{3}$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ (-1) = -\frac{7}{3}$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Calculați $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că dreapta de ecuație $y = 2021$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției f .

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sin x$.

- 5p a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x} dx = e(e-1)$.
- 5p b) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.
- 5p c) Arătați că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^\pi}}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_{șt-nat}*

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați modulul celui de-al cincilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = -1$ și $b_2 = 3$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 7x + 9$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x) > 0$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x-1) = \log_3(6-x) - 2$.
- 5p 4. Determinați numărul natural n , $n \geq 2$, pentru care $C_n^{n-2} - A_n^1 = 5$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(3, -1)$, numărul real m și dreapta d de ecuație $y = (m-1)x - 2m$. Determinați numărul real m pentru care distanța de la punctul A la dreapta d este egală cu 0.
- 5p 6. Determinați $\cos(\pi - 2x)$, știind că x este număr real și $\cos x = \frac{2}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - ay + z = 3 \\ 2x + ay - z = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = -3$.
- 5p b) Determinați numerele reale a pentru care matricea $B(a) = A(a) \cdot A(a)$ are două elemente egale cu 0.
- 5p c) Pentru $a = 1$, arătați că sistemul de ecuații nu are soluții.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - xy$.
- 5p a) Arătați că $(-3) * 3 = 9$.
- 5p b) Demonstrați că $x * y = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $2^x * 4^{x-1} = \frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -1 + \frac{3}{x} - \frac{4\sqrt{x}}{x^2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}(2-\sqrt{x})}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^x \cdot f'(x)}{x-4}$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2xe^x - 2x + 1}{x}$.

5p a) Arătați că funcția $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln x + 2e^x - 2x + 2021$ este o primitivă a funcției f .

5p b) Arătați că $\int_1^e f(x) dx = 2e^e - 4e + 3$.

5p c) Calculați $\int_1^2 x f(x) dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\sqrt{10} - \sqrt{6}$, 2 și $\sqrt{10} + \sqrt{6}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^{2021}}{x^2 + 1}$. Arătați că funcția f este impară.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} = 16$.
- 5p** 4. Determinați numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -2)$, $B(0, 3)$ și $C(-2, 2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p** 6. Triunghiul ABC are măsura unghiului A de 30° și măsura unghiului B de 45° . Arătați că $AC = BC\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 4x + y + mz = 9 \\ x + 2y - z = 4 \\ -2x - 3y = -7 \end{cases}$, unde m este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(m)) = m - 10$, pentru orice număr real m .
- 5p** b) Determinați inversa matricei $A(9)$.
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real m , $m \neq 10$, dacă (a, b, c) este soluția sistemului de ecuații, atunci $\log_2 a = b + c$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 7(x - 3)(y - 3) + 3$.
- 5p** a) Arătați că $x * 3 = 3$, pentru orice număr real x .
- 5p** b) Determinați numărul real x , astfel încât $x * x * x = -46$.
- 5p** c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5^x}{7} + 3$. Demonstrați că $f(x) * f(y) = f(x + y)$, pentru orice numere reale x și y .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x + 2}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^3 - x - 2}{x^2(x + 2)}$.
- 5p** a) Arătați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2x + \frac{1}{x} - 4 \ln(x + 2)$ este o primitivă a funcției f .

- 5p** **b)** Calculați $\int_1^2 (x+2)f(x) dx$.
- 5p** **c)** Determinați numărul real m , $m > 2$, astfel încât $\int_2^m f(x) dx = 2m + \frac{1}{m} - \frac{17}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați suma primilor șapte termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = -5$ și rația $r = 8$.
- 5p** 2. Determinați valorile reale nenule ale lui a pentru care ecuația $ax^2 - x - a - 1 = 0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3x - \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 9} = 2x$.
- 5p** 4. Calculați $5A_3^2 - 3C_5^3$.
- 5p** 5. Se consideră vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + m\vec{j}$ și $\vec{b} = 5\vec{i} - (m^2 + 1)\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB > BC$, $AC = 6$, $BC = 10$ și aria egală cu 15. Determinați măsura unghiului C .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a, b) = aI_2 + bA$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p** b) Demonstrați că $M(a, b) \cdot M(x, y) = M(ax, ay + bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y .
- 5p** c) Arătați că, dacă x și y sunt numere reale pentru care matricele $B = M(x, 2y) + M(y, 2x)$ și $C = M(x\sqrt{2}, 1) \cdot M(y\sqrt{2}, 1)$ sunt egale, atunci $x^2 + y^2 = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = xy + 2x + 2y + 2$ și $x \circ y = x + y + 2$.
- 5p** a) Arătați că $(1 * 2) \circ (1 * 3) = 1 * (2 \circ 3)$.
- 5p** b) Demonstrați că $x * e = e$, pentru orice număr real x , unde e este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** c) Determinați numărul natural n pentru care $n * (-n) \geq n \circ (-n)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}, & x \in (-\infty, 0) \\ x \ln(x + 1) & , \quad x \in [0, +\infty) \end{cases}$.
- 5p** a) Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.
- 5p** b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.
- 5p** c) Arătați că, pentru orice număr real a , $a < 0$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ nu este paralelă cu axa Ox .
2. Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$ și $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1 + x\sqrt{x}}{x^2}$.
- 5p** a) Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g .

- 5p **b)** Calculați $\int_{\frac{1}{4}}^4 g(x) dx$.
- 5p **c)** Determinați numărul real m , $m \in (0,1)$, pentru care $\int_m^1 f^2(x) g(x) dx = \frac{1}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(2 - \lg 40) \cdot \frac{1}{\lg^2 5 - \lg^2 2} = 1$.
- 5p** 2. Determinați valorile reale ale lui m pentru care soluția ecuației $2x - m^2 + 1 = 0$ este număr real strict mai mic decât 0.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+x} = 4^{2x}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $(n+1)! - n! \leq n+2$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,6)$ și $B(0,2)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{BC}$.
- 5p** 6. Determinați numerele reale a , $a > -2$, știind că $a^2 + 1$ și $a + 2$ sunt lungimile ipotenuzei, respectiv razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{a} \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(4)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $\det(A(a) \cdot A(1) - A(a+1)) > 0$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$.
- 5p** c) Arătați că matricea $B(n) = A(1^2) + A(2^2) + A(3^2) + \dots + A(n^2)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \sqrt{3}(xy + 4) - 3(x + y)$.
- 5p** a) Arătați că $\sqrt{3} \circ 2 = \sqrt{3}$.
- 5p** b) Demonstrați că $x \circ y = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Calculați $3^1 \circ 3^{\frac{1}{2}} \circ 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - \arctg x, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{5x}{x^2 + x + 4}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$.
- 5p** a) Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.
- 5p** b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty, 0)$.
- 5p** c) Demonstrați că $f(x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$.

5p a) Arătați că $\int_1^5 x(x+2)f(x)dx = 16$.

5p b) Calculați $\int_1^3 f(x)dx$.

5p c) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați media geometrică a numerelor $x = \log_6 8 + \log_6 27$ și $y = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 + 6^2}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + a$, unde a este număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2-x^2} = 7^{2x-1}$.
- 5p** 4. Arătați că produsul numerelor A_5^2 , C_6^2 și A_4^2 este pătratul unui număr natural.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, a+1)$, $B(2, -3)$ și $C(3, 1-a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctele A , B și C sunt coliniare.
- 5p** 6. Determinați raza cercului înscris în triunghiul MNP , dreptunghic în N , știind că $MN = 12$ și $NP = 16$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + 4y - az = 1 \\ x + ay - z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = -3$.
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0, y_0, z_0) astfel încât $x_0 = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{3}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 27}$.
- 5p** a) Arătați că $2021 * (-2021) = -3$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x+27}$. Demonstrați că $f(x) * f(y) = f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^6 + 7}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-3x^2(x^3 - 1)(x^3 + 7)}{(x^6 + 7)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați asimptotele graficului funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{7}$, pentru orice numere reale x și y .

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{e^{2x}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 \frac{e^{3x} f(x)}{2x+1} dx = e - 1$.

5p b) Calculați $\int_0^1 e^x f(x) dx$.

5p c) Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{e-1}{2e^2}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul a_{2021} al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 2$ și $a_3 = 8$.
- 5p 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ cu dreapta d de ecuație $y = -x + 3$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3^{x+2}} = 27$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să fie divizor al numărului 48.
- 5p 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + m\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-4)\vec{i} + 2\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 6$, $AC = 3$ și unghiul A de 120° . Calculați perimetrul triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2ax + y + z = 0 \\ x + 2ay + z = 1 \\ x + ay - z = -1 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(-1)) = -3$.
- 5p b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.
- 5p c) Determinați numărul întreg a , știind că există numerele reale y_0 și z_0 astfel încât $(1, y_0, z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + 5xy + y$.
- 5p a) Verificați dacă $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Calculați partea întreagă a numărului $q = \left(-\frac{1}{2}\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\right) \circ \dots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)\ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, 0)$.
- 5p c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $[1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^n + 1}{x^2 + 1}$, unde n este număr natural nenul.
- 5p a) Pentru $n = 3$, se consideră funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$. Determinați primitiva G a funcției g pentru care $G(0) = 2021$.

- 5p** **b)** Pentru $n=1$, calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_2 = 2$ și $b_3 = 4$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 3$. Determinați produsul absciselor punctelor în care graficul funcției f intersectează axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x+2} = 1 - x$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-1,0)$ și $C(a, a+2)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Arătați că $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = -2$.
- 5p** b) Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă a și b sunt numere întregi și $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A(a) \cdot X = A(b)$, atunci elementele matricei X sunt numere întregi.
2. Pe mulțimea $A = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}$.
- 5p** a) Arătați că numărul $a = 2 \circ 4$ este întreg.
- 5p** b) Arătați că $x \circ y \geq 4$, pentru orice $x, y \in A$.
- 5p** c) Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” **nu** admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră funcția $f: (-1,1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $x \in (-1,1) \cup (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul intersectează axa Oy .
- 5p** c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}$.
2. Se consideră funcția $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 (x+4)f(x)dx = 6$.

- 5p** **b)** Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** **c)** Arătați că $\int_0^n f(x) e^{-x} dx < 1$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_3 = 5$ și $a_5 = 11$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Determinați numărul real a știind că $f(a) = f(a+1)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - x + 13} = x + 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele strict mai mici decât 3.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(-1,1)$ și $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care dreptele OC și AB sunt perpendiculare.
- 5p 6. Arătați că, pentru orice număr real x , $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & 1-4x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + xy)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați perechile de numere întregi (m, n) pentru care matricea $A(m)$ este inversa matricei $A(n)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x + 2ay$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $1 \circ 0 = 1$, pentru orice număr real a .
- 5p b) Determinați numărul real a , știind că $x \circ 1 > 4$ dacă și numai dacă $x \in (3, +\infty)$.
- 5p c) Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă dacă și numai dacă $a = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{e^x}$.
- 5p a) Arătați că $e^x (f(x) + f'(x)) = 1$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că dreapta de ecuație $y = x$ este tangentă la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^{\pi} f(x) dx = 2$.
- 5p b) Calculați $\int_0^{\pi} xf(x) dx$.
- 5p c) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 f^2(x) dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_{șt-nat}*

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că, dacă $z_1 = 1 - 2i$ și $z_2 = 1 + \frac{1}{2}i$, unde $i^2 = -1$, atunci $z_1 + z_2 = z_1 z_2$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , astfel încât $(f \circ f)(x) = 2f(x - 1)$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} \cdot 2^x = 50 \cdot 7^{x-1}$.
- 5p** 4. Determinați numărul funcțiilor $f: \{0, 2, 4\} \rightarrow \{3, 5, 7, 9\}$ cu proprietatea $f(2) \leq 8$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy , se consideră punctele $A(-2, 4)$, $B(2, 0)$ și C astfel încât $AC = BC$. Determinați ecuația dreptei d , care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB .
- 5p** 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin x + 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(x)) = 6^{2x}$, pentru orice număr real x .
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot B = B \cdot A(x)$.
- 5p** c) Demonstrați că orice matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot X = A(1)$ are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2x^2 + xy + 2y^2$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 1 = 12$.
- 5p** b) Se consideră numerele reale a , b și c astfel încât $2a + 2b + c \neq 0$. Știind că $c \circ a = c \circ b$, demonstrați că $a = b$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ (x + 1) = 5x^3 + 2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x + a(x + 1)$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \ln x + 1 + a$, $x \in (0, +\infty)$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Pentru $a = 1$, determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , funcția f este convexă.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + e^x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{1}{e}$.
- 5p** b) Calculați $\int_0^1 x f(x^2) dx$.
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^2 x^n (f(x) - 2x) dx$. Demonstrați că $I_{n+1} + (n+1)I_n = 2^{n+1}e^2$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați al patrulea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_2 = 6$ și $b_3 = 3$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Determinați numerele reale a , pentru care $f(-a) + f(a) = 0$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1} = 16 \cdot 4^{-x}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(4,-3)$ și $C(a,a+3)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a pentru care dreapta OC trece prin mijlocul segmentului AB .
- 5p 6. Arătați că $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(B(1,2)) = -1$.
- 5p b) Arătați că $\det(A \cdot B(a,b)) = 0$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați numerele reale a și b pentru care $A \cdot B(a,b) = B(a,b) \cdot A$.
2. Pe mulțimea $M = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = |x - y| + 1$.
- 5p a) Arătați că $3 \circ 5 = 3$.
- 5p b) Calculați $a - b$, știind că $a = (2 \circ 3) \circ 4$ și $b = 2 \circ (3 \circ 4)$.
- 5p c) Arătați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m \circ n = m$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 5p c) Demonstrați că funcția f nu este surjectivă.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 2f(x) dx = 3$.
- 5p b) Calculați $\int_0^1 e^x f(x) dx$.
- 5p c) Demonstrați că $\int_0^e f(e^x) dx \leq \int_0^e e^{f(x)} dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p	1. Determinați termenul b_8 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_5 = 3$ și $b_6 = 6$.
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 3$. Arătați că $(f \circ f)(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \lg x = \lg(5x + 6)$.
5p	4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităților.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 3)$, $B(-1, -2)$ și $C(a, -2)$, unde a este număr real nenul, $a \neq -1$. Determinați numărul real a pentru care ortocentrul triunghiului ABC este O .
5p	6. În triunghiul ABC , $AB = 6$, $AC = 3\sqrt{6}$ și $B = \frac{\pi}{3}$. Determinați măsura unghiului C .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	a) Arătați că $\det(A(\sqrt{2})) = 3$.
5p	b) Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a .
5p	c) Determinați numărul întreg k pentru care $A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) = kA(1)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x \circ y = 3xy - 2x - 2y + 2$.
5p	a) Arătați că numărul $\frac{1}{3} \circ \frac{1}{3}$ este întreg.
5p	b) Arătați că $x \circ x \geq \frac{2}{3}$, pentru orice număr real x .
5p	c) Determinați numărul real x pentru care $x \circ x \circ x = e$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Arătați că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.
5p	c) Demonstrați că $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) < f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.
	2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.
5p	a) Arătați că $\int_1^4 f^4(x) dx = 21$.

- 5p** **b)** Calculați $\int_0^1 f(e^x) dx$.
- 5p** **c)** Arătați că $\int_1^4 e^{f(x)} dx = 2e^2$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianța 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 2$ și $b_2 = 6$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 7$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 7$. Calculați $(f \circ g)(7)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = x - 2$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) > 0$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(3,5)$ și $D(5,6)$. Demonstrați că punctele B , D și mijlocul segmentului AC sunt coliniare.
- 5p 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $(\sin x - \cos x)^2 = 2$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 1+2^a & 2^a \\ -2^a & 1-2^a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Arătați că $A(1) + A(2) - A(1) \cdot A(2) = I_2$.
- 5p c) Se consideră numerele naturale m și n , astfel încât $A(m) \cdot A(n) = A(m+n)$. Arătați că $m = n = 1$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + y^2 + x + y$.
- 5p a) Arătați că $(-1) * (-1) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că $x * y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2 * x^2 \leq 4$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - \frac{1}{2} \ln(x+2)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x \in (-2, +\infty)$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - f(x)}{x}$.
- 5p c) Demonstrați că $x^2 + 4x + \frac{15}{4} \geq \frac{1}{2} \ln(2x+4)$, pentru orice $x \in (-2, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^3 (x^2 + 1) f(x) dx = 18$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^3 x f(x) dx = 4 + \ln 5$.
- 5p c) Demonstrați că $F(x+1) \geq F(x) + 1$, pentru orice număr real x , unde F este o primitivă a lui f .

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianța 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_5 = 6$ și $b_6 = 18$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 4$. Determinați numerele reale m , știind că $f(m) = m$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $100 \cdot 10^{2x} = 10^{3x}$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ și $C(0, 4)$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .
- 5p 6. Arătați că $\sin 2x = 1$, știind că $\operatorname{tg} x = 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = -1$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.
- 5p c) Se consideră numerele reale a , b și c , astfel încât $A(a) \cdot A(b) = A(c)$. Demonstrați că $a^2 + b^2 + 2c = 3$.
2. Pe mulțimea $M = [-1, 1]$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.
- 5p a) Arătați că $0 \circ 1 = 1$.
- 5p b) Determinați $x \in M$ pentru care $x \circ x = 0$.
- 5p c) Demonstrați că $x \circ \sqrt{1-x^2} = 1$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x \ln x - 1$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = e^x + \ln x + 1$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $e^x + x \ln x \geq \sqrt{e} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2 + 2} dx = \frac{17}{6}$.
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Se consideră funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$. Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care
- $$\int_0^1 g(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \frac{a + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{st-nat}}$

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $3(4-i) + 3i(1+i) = 9$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$. Calculați $(f \circ f)(2)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 2x + 4) = 1$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctele O , A și B sunt coliniare.
- 5p** 6. Se consideră $E(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x, y) = \begin{pmatrix} x+3y & 4y \\ -2y & x-3y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1,1)) = 0$.
- 5p** b) Demonstrați că, dacă matricea $A(x, y)$ este inversabilă, atunci $|x| \neq |y|$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) , de numere întregi, pentru care $A(m, n) \cdot A(-m, n) = I_2$.
2. Pe mulțimea $A = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = 4^{xy} - (1 - x - y)$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 0 = 2$.
- 5p** b) Arătați că $x \circ \frac{1}{x} \geq 5$, pentru orice $x \in A$, $x \neq 0$.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă m și n sunt numere naturale impare, atunci $m \circ n$ este număr natural impar.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(x-1)(x^2 + x + 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $x^3 \geq 3 \ln x + 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x} dx = 2$.
- 5p** b) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + e^x) dx = \frac{e^2 + 1}{e}$.
- 5p** c) Demonstrați că $\int_{-1-a}^{-1+a} f(x) dx \geq -\frac{2a}{e}$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numerele $\log_2 3$, $\log_2 6$ și $\log_2 12$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$. Determinați numărul real x pentru care $f(x) = x$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $|2x - 1| = 2x + 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară și cifra unităților impară.
- 5p 5. Determinați numărul real a , pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = 8\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p 6. În triunghiul ABC dreptunghic în A , $BC = 12$ și $B = \frac{\pi}{6}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2a-1 & 4a-4 \\ 1-a & 3-2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați numărul natural n , știind că $A(1) \cdot A(2) \cdot A(2^2) \cdot A(2^3) \cdot A(2^4) = A(32) \cdot A(-n)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3x^2 - 5xy + 2y^2$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ 2 = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ x = 0$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $2^x \circ 3^x = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = -1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $\sqrt{(x^2 + 1)^2 + 2(x^2 + 1) + 2} - \sqrt{4x^2 + 4x + 2} \leq (x-1)^2$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (4 - f^2(x)) dx = \pi$.

- 5p** | **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2(\sqrt{2}-1)$.
- 5p** | **c)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx = \ln(\sqrt{34} - \sqrt{17} + 4\sqrt{2} - 4)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 3 + 2i$. Arătați că $z + \frac{13}{z} = 6$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x$. Determinați numărul real a pentru care $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(-a)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x+5} = 9 \cdot 3^{x+1}$.
- 5p** 4. Se consideră A , o mulțime cu 4 elemente. Calculați probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor lui A , aceasta să aibă un număr impar de elemente.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(3,5)$ și $C(0,6)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este paralelă cu mediana din vârful C a triunghiului ABC .
- 5p** 6. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC , știind că $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$ și $B = \frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră a un număr real nenul și matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & -4x \\ 0 & a & 0 \\ x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(x)) = a$, pentru orice număr real x .
- 5p** b) Determinați numărul real nenul a astfel încât $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Pentru $a = 1$, determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(3)$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \log_2(2^x + 2^y - 1)$.
- 5p** a) Arătați că $0 * 2021 = 2021$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Determinați $x \in M$ pentru care $x * (x+1) * (x+2) = \log_2 54$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{1-x^2}{2(x^2+1)\sqrt{(x^2+x+1)(x^2+1)}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $\sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}} + \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}} \leq \sqrt{6}$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3 - 2 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) + 2 \ln x) dx = 14$.

- 5p** b) Calculați $\int_1^e (2x + 3 - f(x)) dx$.
- 5p** c) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x^3 + 1) dx = \frac{4(2 - \ln 2)}{3}$.