

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a V -a

Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	a) Completăm șirul cu numerele naturale 7,8,9,10,17,18,19,20,..., 2027,2028,2029,2030	2p
	De la 1 la 2030 sunt 2030 de numere naturale	2p
	$2030:10 = 203$ grupe de 10 numere din care 6 sunt din șir și 4 sunt adăugate	2p
	$203 \cdot 6 = 1218$ termeni în șir	2p
	b) $1+2+3+4+5+6+11+12+13+14+15+16+\dots+2021+2022+2023+2024+2025+2026 =$	2p
	$= (1+2+3+4+5+6) + (11+12+13+14+15+16) + \dots + (2021+2022+2023+2024+2025+2026) =$	
	$= 21 + (1+10+2+10+3+10+4+10+5+10+6+10) + \dots$	2p
	$+ (1+2020+2+2020+3+2020+4+2020+5+2020+6+2020) =$	
2.	$= 21 + (21+60) + (21+120) + \dots + (21+2020) = 21 + (21+1 \cdot 60) + (21+2 \cdot 60) + \dots + (21+202 \cdot 60)$	2p
	$= 21 \cdot 203 + 60 \cdot (1+2+3+\dots+202) =$	2p
	$= 21 \cdot 203 + 60 \cdot \frac{202 \cdot 203}{2} =$	2p
	$= 203 \cdot (21 + 60 \cdot 101) = 1234443$	3p
	Notăm cu x diferența de vârstă dintre mama și băiat, I – vârsta lui Ionel și M- vârsta mamei.	1p
	$a \neq 0$	
	$M = I + x \Rightarrow \overline{a2} = \overline{2a} + x \Rightarrow 10a + 2 = 20 + a + x \quad (1)$	3p
	$\overline{2b}$ și $M = 2 \cdot \overline{2b} \Rightarrow M - I = x \Rightarrow x = \overline{2b} \Rightarrow x = 20 + b \quad (2)$	3p
	Din (1) și (2) $\Rightarrow b = 9a - 38$	5p
	Observăm că $a \geq 5$	3p
	Pentru $a = 5 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow I = 25$ ani $\Rightarrow M = 52$ ani	3p
	Pentru $a = 6 \Rightarrow b = 54 - 38 \Rightarrow b = 16$ (nu ne convine, b este cifră)	3p

3.	a) Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0,1,4,5,6 sau 9. Dacă $n = 0$, atunci $N = 1 + 7 = 8$ nu este pătrat perfect. Fie $n \geq 1$ Dacă n este par ($n = 2k$, k număr natural nenul), atunci $u(9^{2k}) = 1$ și $u(7^{4k+1}) = 7$, deci $u(N) = 8$. Dacă n este impar ($n = 2k + 1$, k număr natural), atunci $u(9^{2k+1}) = 9$ și $u(7^{4k+3}) = 3$, deci $u(N) = 2$. În concluzie, N nu pot fi pătrat perfect, pentru orice valoare a numărului natural n. b) $4^{615} = (2^3)^{410} < (3^2)^{410} = 3^{820}$ $5^{804} = (5^2)^{402} < (3^3)^{402} = 3^{1206}$ Prin înmulțire, se obține $b = 4^{615} \cdot 5^{804} < 3^{2026} = a$.	2p 1p 3p 3p 1p 4p 4p 3p
4	a) $2651 = 16 \cdot (a^2 + a) + (a^2 + a - 1)$ ($a^2 + a - 1 = \text{restul maxim}$) $2652 = 17 \cdot (a^2 + a) \Rightarrow a^2 + a = 156$ $a \cdot (a + 1) = 12 \cdot 13$, de unde $a = 12$. b) $S = (41 \cdot 0 + 4) + (41 \cdot 1 + 4) + (41 \cdot 11 + 4) + \dots + \left(41 \cdot \underbrace{111\dots 1}_{2026 \text{ cifre}} + 4 \right)$ $S = 41 \cdot \left(0 + 1 + 11 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{2026 \text{ cifre}} \right) + 4 \cdot 2027$ $S = 41 \cdot \left(0 + 1 + 11 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{2026 \text{ cifre}} \right) + (41 \cdot 197 + 31)$ $S = 41 \cdot \left[\left(0 + 1 + 11 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{2026 \text{ cifre}} \right) + 197 \right] + 31$ $\Rightarrow$ restul împărțirii lui S la 41 este 31.	4p 4p 4p 3p 2p 2p 2p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a VI-a

Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	a) $a = \frac{4-1}{1 \cdot 4} + \frac{7-4}{3 \cdot 7} + \frac{10-7}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{103-100}{100 \cdot 103}$	1p
	$a = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{103} = \frac{1}{1} - \frac{1}{103} = \frac{102}{103}$	2p
	$b = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{2 \cdot 7} + \frac{5}{7 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \dots + \frac{5}{102 \cdot 107} \right)$	1p
	$b = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{7-2}{2 \cdot 7} + \frac{12-7}{7 \cdot 12} + \frac{17-12}{12 \cdot 17} + \dots + \frac{107-102}{102 \cdot 107} \right)$	1p
	$b = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{102} - \frac{1}{107} \right)$	1p
	$b = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{107} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{107}{214} - \frac{2}{214} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{105}{214} = \frac{21}{214}$	2p
	$\frac{103 \cdot a + 214 \cdot b}{103 \cdot a - 214 \cdot b} = \frac{102 + 21}{102 - 21} = \frac{123}{81} = \frac{41}{27}$	2p
	valoarea raportului este egală cu 1, (518)	1p
	b) $2026 \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+4} + \frac{1}{d+5} + \frac{1}{e+6} + \frac{1}{f+7} \right) = 2025$	2p
	$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+4} + \frac{1}{d+5} + \frac{1}{e+6} + \frac{1}{f+7} = \frac{2025}{2026}$	1p
	$S = \frac{a+2-1}{a+2} + \frac{b+3-1}{b+3} + \frac{c+4-1}{c+4} + \frac{d+5-1}{d+5} + \frac{e+6-1}{e+6} + \frac{f+7-1}{f+7}$	2p
	$S = 1 - \frac{1}{a+2} + 1 - \frac{1}{b+3} + 1 - \frac{1}{c+4} + 1 - \frac{1}{d+5} + 1 - \frac{1}{e+6} + 1 - \frac{1}{f+7}$	1p
	$S + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+4} + \frac{1}{d+5} + \frac{1}{e+6} + \frac{1}{f+7} = 6$	2p
	$S + \frac{2025}{2026} = 6 \rightarrow S = 6 - \frac{2025}{2026} = 5 + 1 - \frac{2025}{2026} = 5 + \frac{1}{2026} = \frac{10131}{2026}$	2p

2.	$n : 25 = x \text{ rest } r_1 \rightarrow n = 25 \cdot x + r_1, r_1 < 25$ $n : 45 = y \text{ rest } r_2 \rightarrow n = 45 \cdot y + r_2, r_2 < 45$ $n : 81 = z \text{ rest } r_3 \rightarrow n = 81 \cdot z + r_3, r_3 < 81$ $r_1 < 25 \rightarrow r_1 \leq 24; r_2 < 45 \rightarrow r_2 \leq 44; r_3 < 81 \rightarrow r_3 \leq 80$ Adunând cele 3 inegalități obținem $r_1 + r_2 + r_3 \leq 148$, dar $r_1 + r_2 + r_3 = 148 \rightarrow r_1 = 24, r_2 = 44, r_3 = 80. \rightarrow$ $\left. \begin{aligned} n &= 25 \cdot x + 24 \rightarrow n + 1 = 25 \cdot (x + 1) \\ n &= 45 \cdot y + 44 \rightarrow n + 1 = 45 \cdot (y + 1) \\ n &= 81 \cdot z + 80 \rightarrow n + 1 = 81 \cdot (z + 1) \end{aligned} \right\} \rightarrow n + 1 = [25; 45; 81] \cdot k, k \in N$ $[25; 45; 81] = 5^2 \cdot 3^4 = 2025 \rightarrow n + 1 = 2025 \cdot k, k \in N$ $n + 2026 = n + 1 + 2025 = 2025 \cdot k + 2025 = 2025 \cdot (k + 1) : 2025$	2p 2p 2p 2p 1p 1p 4p 3p 4p
3	a) Notăm $d = (a; b)$ și $m = [a; b] \rightarrow d \cdot 0,2 = m \cdot 0,0(1) \rightarrow \frac{d}{5} = \frac{m}{90} \rightarrow m = 18 \cdot d$ $d = (a; b) \rightarrow a = d \cdot x, b = d \cdot y, (x; y) = 1$ $a \cdot b = (a; b) \cdot [a; b] \rightarrow d \cdot x \cdot d \cdot y = d \cdot m \rightarrow x \cdot d \cdot y = 18 \cdot d \rightarrow x \cdot y = 18$ Cum $a < b \rightarrow d \cdot x < d \cdot y \rightarrow x < y$ Din $x \cdot y = 18, (x; y) = 1, x < y$ rezultă următoarele cazuri : Cazul I : $x = 1, y = 18 \rightarrow a = d, b = 18 \cdot d$, dar $5 < a < b < 90 \rightarrow$ $5 < d < 18 \cdot d < 90 \rightarrow 5 < d, d < 5$ nu convine Cazul II : $x = 2, y = 9 \rightarrow a = 2 \cdot d, b = 9 \cdot d$, dar $5 < a < b < 90 \rightarrow$ $5 < 2 \cdot d < 9 \cdot d < 90 \rightarrow 3 \leq d \leq 9 \rightarrow d \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ Soluțiile sunt $\left\{ \begin{aligned} a &= 6 \\ b &= 27 \end{aligned} \right\}; \left\{ \begin{aligned} a &= 8 \\ b &= 36 \end{aligned} \right\}; \left\{ \begin{aligned} a &= 10 \\ b &= 45 \end{aligned} \right\}; \left\{ \begin{aligned} a &= 12 \\ b &= 54 \end{aligned} \right\}; \left\{ \begin{aligned} a &= 14 \\ b &= 63 \end{aligned} \right\}; \left\{ \begin{aligned} a &= 16 \\ b &= 72 \end{aligned} \right\}; \left\{ \begin{aligned} a &= 18 \\ b &= 81 \end{aligned} \right\}.$	2p 1p 2p 2p 1p 2p 1p
	b) $\overline{abc} = (98a + 7b) + (2a + 3b + c)$ și $\overline{cba} = (98c + 7b) + (2c + 3b + a)$ $7/\overline{abc} \rightarrow 7/(2a + 3b + c), 7/\overline{cba} \rightarrow 7/(2c + 3b + a)$ $\rightarrow 7/(3a + 6b + 3c)$ Dar $7/(7a + 7b + 7c) \rightarrow 7/(4a + b + 4c)$	4p 2p 2p 2p

4	a) $\angle AOC = 90^\circ$; $\angle BOD = 90^\circ$ Notăm: $\angle AOB = 2a$ și $\angle COD = 2b$ $\angle AOB + \angle COD + \angle AOC + \angle BOD = 360^\circ \rightarrow \angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ $\rightarrow a + b = 90^\circ$ OM – bisectoarea unghiului $\angle AOB$: $\angle AOM = \angle MOB = \frac{\angle AOB}{2} = a$ ON – bisectoarea unghiului $\angle COD$: $\angle CON = \angle NOD = \frac{\angle COD}{2} = b$ $\angle MON = \angle MOA + \angle AOC + \angle CON = a + 90^\circ + b = 180^\circ \rightarrow$ $\angle MON$ – alungit $\rightarrow$ punctele M, O, N sunt coliniare	1p 2p 2p 2p 2p
	b) OP – bisectoarea unghiului $\angle BOC$: $\angle BOP = \angle POC = \frac{\angle BOC}{2} = x$ $\angle NOP = \angle NOC + \angle COP = b + x$ $\angle BOP = \angle POA + \angle AOB = \angle POA + 2a = x$ $\angle POA = \angle COA - \angle COP = 90^\circ - x \rightarrow x = 90^\circ - x + 2a \rightarrow 2x = 90^\circ + 2a$ $\rightarrow x = 45^\circ + a$ $\rightarrow \angle NOP = b + x = b + 45^\circ + a = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$	2p 2p 2p 2p 2p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a VII-a

Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$(\sqrt{2027} - \sqrt{2026})^x = (\sqrt{2027} + \sqrt{2026})^{2025} \mid \cdot (\sqrt{2027} - \sqrt{2026})^{2025}$ $(\sqrt{2027} - \sqrt{2026})^{x+2025} = 1$ $(\sqrt{2027} - \sqrt{2026})^{x+2025} = (\sqrt{2027} - \sqrt{2026})^0$ $x = -2025$	6p 5p 5p 5p
2.	$4^{2026} - 3 \cdot 4^{2025} = 4^{2025}$ $4^{2025} - 3 \cdot 4^{2024} = 4^{2024}$ $4^2 - 3 \cdot 4 - 3 = 1$ $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9+1}{2}} + \sqrt{\frac{9-1}{2}} = \sqrt{5} + 2$ $a = \sqrt{1} - \sqrt{5} - 2$ $a = -1 - \sqrt{5}.$ $b = \frac{3}{10\sqrt{3} \cdot (8\sqrt{2} - 5\sqrt{5})} \cdot \frac{10}{(8\sqrt{2} + 5\sqrt{5})}$ $b = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot (64 \cdot 2 - 25 \cdot 5)}$ $b = \frac{\sqrt{3}}{3}.$ Cum $a < 0$ și $b > 0$, rezultă că $a < b$.	5p 3p 1p 1p 3p 2p 1p 5p

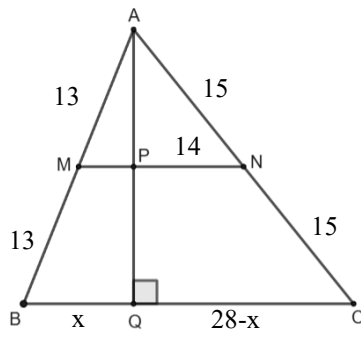
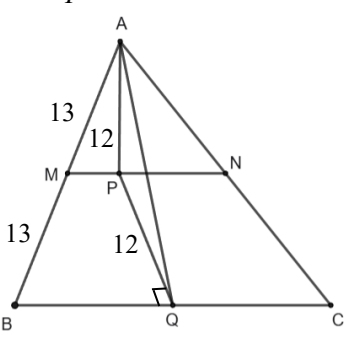
3	În triunghiurile dreptunghice $MN'H$ și $MP'H$ avem $N'T$ și $P'T$ mediane . $N'T = P'T = \frac{1}{2} MH$. În triunghiurile dreptunghice $NN'P$ și $PP'N$ avem $N'M'$ și $P'M'$ mediane. $N'M' = P'M' = \frac{1}{2} NP$. Cum $M'N'TP'$ este romb avem $MH \equiv NP$. Triunghiurile dreptunghice $MN'H$ și $NN'P$ sunt congruente ($MH \equiv NP$ și $\angle HMN' \equiv \angle N'NP$) $HN' \equiv N'P \Rightarrow \Delta HN'P$ este triunghi dreptunghic isoscel cu $\angle HPN' = 45^\circ$ Cum $\Delta MP'P$ este triunghi dreptunghic cu $\angle MP'P = 90^\circ$ și $\angle P'PM = 45^\circ \Rightarrow \angle NMP = 45^\circ$.	3p 3p 3p 5p 5p 2p
4	Notăm cu P mijlocul lui NB și cu O central pătratului. $ON \perp AB, MP \perp AB, CB \perp AB$ și deci $ON \parallel MP \parallel BC$ de aici rezultă imediat $AM = 3MC$. Avem $\Delta AMD \equiv \Delta AMB$ cazul L.U.L. și deci $\angle AMD \equiv \angle AMB$ și $\angle ADM \equiv \angle ABM \equiv \angle BNM$ $\angle DMN = \angle DMA + \angle AMN = 2 \cdot \angle AMB - \angle NMB$ Dar $\angle NMB = 2 \cdot \angle PMB = 2 \cdot \angle MBC$ Deci $\angle DMN = 2 \cdot (180^\circ - 45^\circ - \angle ABM) - 2 \cdot \angle MBC =$ $= 270^\circ - 2 \cdot (\angle ABM + \angle MBC) = 90^\circ$. Altă metodă - reciproca teoremei lui Pitagora.	6p 5p 5p 5p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a VIII-a

Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	a) $x \in (-2, 6) \Rightarrow -2 < x < 6$ $y \in (-5, 3) \Rightarrow -5 < y < 3$ $\begin{array}{c} (+) \\ -7 < x + y < 9 \end{array} / -9$ $-16 < x + y - 9 < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x + y - 9 = -x - y + 9$ $0 < x + y + 7 < 16 \Rightarrow x + y + 7 = x + y + 7$ Deci, $n = x + y - 9 + x + y + 7$ $n = -x - y + 9 + x + y + 7$ $n = 16 = 4^2 \Rightarrow n \text{ este pătrat perfect}$	1p 1p 1p 3p 1p 2p 1p
	b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2024 \cdot 2025} =$ $= \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2025-2024}{2024 \cdot 2025}$ $= \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 4} - \frac{3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2025}{2024 \cdot 2025} - \frac{2024}{2024 \cdot 2025}$ $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}$ $= 1 - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025}$ $\sqrt{x^2 + 2x \cdot \frac{2024}{2025} + \left(\frac{2024}{2025}\right)^2} = \frac{4049}{2025}$ $\sqrt{\left(x + \frac{2024}{2025}\right)^2} = \frac{4049}{2025}$ $x + \frac{2024}{2025} = \frac{4049}{2025} \Rightarrow x = \frac{2025}{2025} \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{N}.$	2p 2p 2p 1p 2p 2p

2.	a) I înainte de îndoire  Fie $AQ \perp BC$; notăm $BQ = x$ $\Delta ABQ \xrightarrow{T.P.} AQ^2 = AB^2 - x^2$ $\Delta ACQ \xrightarrow{T.P.} AQ^2 = AC^2 - (28 - x)^2$ $\Rightarrow x = 10$ $\Delta ABQ \xrightarrow{T.P.} AQ^2 = 26^2 - 10^2$ $AQ = 24$ $AQ \cap MN = \{P\}$ $AP \perp MN$ $AP = PQ = \frac{1}{2} \cdot AQ = 12$ II după îndoire  Fie $AP \perp MN$; $AP \subset (AMN)$ $\left. \begin{array}{l} (AMN) \perp (MNCB) \\ (AMN) \cap (MNCB) = MN \end{array} \right\} \Rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} AP \perp (MNCB) \\ PQ \perp BC \\ PQ, BC \subset (MNCB) \end{array} \right\} \xrightarrow{T3\perp} AQ \perp BC$ $\Leftrightarrow d(A, BC) = AQ$ $\Delta APQ \xrightarrow{T.P.} AQ^2 = AP^2 + PQ^2$ $AQ = 12\sqrt{2}$	2p 2p 2p 2p 2p
	b) $A_{\Delta ABC(\text{înainte})} = \frac{AQ \cdot BC}{2} = \frac{24 \cdot 28}{2} = 336 \text{ cm}^2$ $A_{\Delta ABC(\text{după})} = \frac{AQ \cdot BC}{2} = \frac{12\sqrt{2} \cdot 28}{2} = 6\sqrt{2} \cdot 28 = 168\sqrt{2} \text{ cm}^2$ $\frac{A_{\Delta ABC(\text{înainte})}}{A_{\Delta ABC(\text{după})}} = \frac{336}{168\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$	3p 4p 4p
3.	a) $\begin{cases} \overline{abc} = \overline{xy^2} + \overline{uv^2} \\ \overline{cba} = \overline{yx^2} + \overline{vu^2}, a < c \end{cases}$ $\begin{cases} 100a + 10b + c = (10x + y)^2 + (10u + v)^2 \\ 100c + 10b + a = (10y + x)^2 + (10v + u)^2 \end{cases}$ $\quad \quad \quad (+)$ $101a + 20b + 101c = 100x^2 + 20xy + y^2 + 100u^2 + 20uv + v^2 + 100y^2 + 20xy + x^2 + 100v^2 + 20uv + u^2$ $101(a + c) + 20b = 101(x^2 + y^2) + 40xy + 101(u^2 + v^2) + 40uv$ $101(a + c - x^2 - y^2 - u^2 - v^2) = 20(2xy + 2uv - b)$ $(101; 20) = 1 \Rightarrow \frac{101}{20} \mid (2xy + 2uv - b)$ $20 \mid (a + c - x^2 - y^2 - u^2 - v^2)$	1p 1p 1p 1p 1p

	$\left. \begin{aligned} a + c &\leq 18 \\ x^2 &\geq 1; y^2 \geq 1; u^2 \geq 1; v^2 \geq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ a, b, c, x, y, u, v – cifre nenule $\Rightarrow a + c - x^2 - y^2 - u^2 - v^2 \in M_{20} < 20$ $\Rightarrow a + c - x^2 - y^2 - u^2 - v^2 \leq 0$ $\Rightarrow 2xy + 2uv - b \leq 0$ $2xy + 2uv - b \geq 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 9 \Rightarrow 2xy + 2uv - b \geq -5,$ Și cum $101 / (2xy + 2uv - b) \Rightarrow 2xy + 2uv - b = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2xy + 2uv \\ a + c = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 \end{cases}$ $\xrightarrow{+} \Rightarrow a + b + c = x^2 + 2xy + y^2 + u^2 + 2uv + v^2$ $\Rightarrow a + b + c = (x + y)^2 + (u + v)^2$	1p 1p 1p 1p 1p
b)	$\begin{cases} \overline{abc} = \overline{xy^2} + \overline{uv^2} \\ \overline{cba} = \overline{yx^2} + \overline{vu^2}, a < c \end{cases}$ $\xrightarrow{(-)} \Rightarrow \overline{cba} - \overline{abc} = \overline{yx^2} - \overline{xy^2} + \overline{vu^2} - \overline{uv^2}$ $\Leftrightarrow 100c + 10b + a - 100a - 10b - c = (\overline{yx} - \overline{xy})(\overline{yx} + \overline{xy}) +$ $+ (\overline{vu} - \overline{uv})(\overline{vu} + \overline{uv})$ $\Rightarrow 99(c - a) = (10y + x - 10x - y)(10y + x + 10x + y) + (10v + u -$ $- 10u - v)(10v + u + 10u + v)$ $\Rightarrow 99(c - a) = (9y - 9x)(11x + 11y) + (9v - 9u)(11u + 11v)$ $\Rightarrow 99(c - a) = 99(y - x)(y + x) + 99(v - u)(v + u)$ $\Rightarrow c - a = y^2 - x^2 + v^2 - u^2 \quad (*)$ Din subpunctul a) $\Rightarrow c + a = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 \quad (*)$ $\xrightarrow{+} \begin{aligned} 2c &= 2y^2 + 2v^2 : 2 \\ c &= y^2 + v^2 \end{aligned}$ Scădem cele două relații (*) $\Rightarrow 2a = 2x^2 + 2u^2 : 2$ $a = x^2 + u^2$ Iar, din subpunctul a) $\Rightarrow b = 2xy + 2uv$ $b = 2(xy + uv) \leq 9$ $\Rightarrow xy + uv \leq 4$ $a < c \Rightarrow x^2 + u^2 < y^2 + v^2$ $x, y, u, v = \text{cifre nenule} \Rightarrow \begin{cases} x = u = 1 \\ y = 1; v = 2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 1 = u \\ y = 2; v = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow a = 1^2 + 1^2 = 2, c = 1^2 + 2^2 = 5, b = 2(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = 6$ $\Rightarrow \overline{abc} = 265$ $x, y, u, v = \text{cifre nenule} \Rightarrow \begin{cases} x = u = 1 \\ y = v = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow a = 1^2 + 1^2 = 2, c = 2^2 + 2^2 = 8, b = 2(1 \cdot 2 + 1 \cdot 2) = 8$ $\Rightarrow \overline{abc} = 288$	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p

4.	a)	Construim $B'D \parallel C'B, D \in BC$ $AB' \perp BC' \Rightarrow AB' \perp B'D \Rightarrow \sphericalangle AB'D = 90^\circ$ $BDB'C'$ - paralelogram $\Rightarrow B'D = BC'$, dar $BC' \equiv AB' \Rightarrow B'D = AB'$ $\Rightarrow \triangle AB'D$ isoscel și $BD = B'C' = a \Rightarrow BD = AB = a$ $\Rightarrow \triangle ABD$ isoscel Cum $\sphericalangle ABD = 120^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAD = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle CAD = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle CAD$ dreptunghic $\xRightarrow{T.P.} AD = a\sqrt{3}$ $\triangle AB'D$ isoscel $\Rightarrow AB' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ $\triangle ABB': TP \Rightarrow BB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	2p
	b)	$(BMC') \cap (ABC) = BM$ BM – mediană în $\triangle ABC$ echilateral $\Rightarrow BM \perp AC$ Dar $BM \perp (CC'M) \Rightarrow BM \perp C'M$ $AC \cap C'M = \{M\}$ $AC \subset (ABC), C'M \subset (BMC')$ $\Rightarrow \sphericalangle((BMC'), (ABC)) = \sphericalangle C'MC$ $tg(\sphericalangle C'MC) = \frac{CC'}{CM} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}$	2p 1p 2p 3p 3p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Galați - 7 februarie 2026

Clasa a IX-a

Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemă	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	a) Notăm $[x] = a \in \mathbb{Z}, \{x\} = \alpha \in [0, 1)$ partea fracționară a lui x. Analizăm cazurile $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ și $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$. Dacă $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$, atunci $[x + \frac{1}{2}] = a$ și obținem $[x] + [x + \frac{1}{2}] = a + a = 2a = [2x]$. Dacă $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$, atunci $[x + \frac{1}{2}] = a + 1$ și obținem $[x] + [x + \frac{1}{2}] = a + a + 1 = 2a + 1 = [2x]$ pentru că $2a + 1 \leq 2x < 2a + 2$. b) Ecuația poate fi scrisă sub forma $\left[\frac{2x-3}{6}\right] + \left[\frac{2x-3}{6} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2x-3}{6} + \frac{2}{3}\right] = \frac{3x+1}{5}$ Aplicând identitatea lui Hermite pentru $n=3$ obținem $\left[\frac{2x-3}{6}\right] + \left[\frac{2x-3}{6} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2x-3}{6} + \frac{2}{3}\right] = \left[3 \cdot \frac{2x-3}{6}\right]$ Ecuația devine $\left[x - \frac{3}{2}\right] = \frac{3x+1}{5} \Rightarrow k \leq x - \frac{3}{2} < k + 1$ Notăm $\frac{3x+1}{5} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{5k-1}{3}$ Obținem $k \leq \frac{5k-1}{3} - \frac{3}{2} < k + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{5k-1}{3} - k < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{2} \leq 2k - 1 < \frac{15}{2} \Leftrightarrow \frac{11}{4} \leq k < \frac{17}{4}$ Cum $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{3, 4\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{14}{3}, \frac{19}{3}\right\}$ soluțiile ecuației.	1p 4p 2p 3p 1p 3p 1p 1p 3p 2p
2.	a) Pentru $n = 1, s_1 = a + \frac{1}{a} = 1013 + \sqrt{1012 \cdot 1014} + \frac{1}{1013 + \sqrt{1012 \cdot 1014}}$ Dar $(1013 + \sqrt{1012 \cdot 1014})(1013 - \sqrt{1012 \cdot 1014}) = 1013^2 - (1013 - 1)(1013 + 1) = 1$ Deci $s_1 = 1013 + \sqrt{1012 \cdot 1014} + 1013 - \sqrt{1012 \cdot 1014} = 2026 \in \mathbb{N}$. Presupunem că $s_k \in \mathbb{N}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Din $s_n = a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{N}, s_1 = a + \frac{1}{a} = 2026 \in \mathbb{N} \Rightarrow s_n \cdot s_1 = \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) \in \mathbb{N}$ Deci $2026s_n = a^{n+1} + a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{a^{n+1}} = s_{n+1} + s_{n-1} \in \mathbb{N}$ Cum $s_{n-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow s_{n+1} \in \mathbb{N}$ și finalizare b) Din a), $s_{n+1} = 2026s_n - s_{n-1}$, $s_1 = 2026 : 2026$, Dacă $s_{2k-1} : 2026$, atunci $s_{2k+1} = 2026s_{2k} - s_{2k-1}, k \in \mathbb{N}^*$ și finalizare	2p 2p 2p 4p 4p 1p 2p 1p 3p

3	a) Dacă P_1, P_2, P_3, P_4 sunt mijloacele segmentelor DH_1, AH_2, BH_3, CH_4, atunci $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \text{ deci } \overrightarrow{OP_1} = \frac{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OH_1}}{2} = \frac{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$ $\text{Din } \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OP_2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH_2}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} \Rightarrow P_1 = P_2$ $\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_4} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$ Finalizare: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$, mijloc comun. b) Din a), $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$, iar $\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{2}$, Q mijlocul lui MN $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}, \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2}, \text{ deci } \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OP}$ Finalizare: punctele O, P, Q sunt coliniare	4p 4p 3p 1p 4p 4p 1p
4	Metoda 1. Aplicând inegalitatea lui Titu Andreescu obținem $\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} = \frac{a^2}{2a^2+a \cdot b+a \cdot c} + \frac{b^2}{2b^2+b \cdot c+b \cdot a} + \frac{c^2}{2c^2+c \cdot a+c \cdot b}$ $\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+2(a \cdot b+b \cdot c+a \cdot c)}$ Demonstrăm că $\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+2(a \cdot b+b \cdot c+a \cdot c)} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(a+b+c)^2 > 4(a^2+b^2+c^2+a \cdot b+b \cdot c+a \cdot c) \Leftrightarrow$ $2(a \cdot b+b \cdot c+a \cdot c) > a^2+b^2+c^2,$ inegalitate pe care o vom demonstra folosind inegalitățile din triunghi $b+c > a \Rightarrow a \cdot b+a \cdot c > a^2$ $a+c > b \Rightarrow a \cdot b+b \cdot c > b^2$ $a+b > c \Rightarrow a \cdot c+b \cdot c > c^2$ Prin însumarea ultimelor 3 inegalități obținem ceea ce rămăsese de demonstrat. Metoda 2 Folosind inegalitatea C-B-S obținem $[a(2a+b+c) + b(2b+c+a) + c(2c+a+b)] \cdot \left(\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} \right) \geq (a+b+c)^2$ Pentru a obține inegalitatea cerută este suficient să demonstrăm $(a+b+c)^2 > \frac{2}{3} \cdot [a(2a+b+c) + b(2b+c+a) + c(2c+a+b)]$ $\Leftrightarrow 2(a \cdot b+b \cdot c+c \cdot a) > a^2+b^2+c^2,$ inegalitate pe care o vom demonstra folosind inegalitățile din triunghi $b+c > a \Rightarrow a \cdot b+a \cdot c > a^2$ $a+c > b \Rightarrow a \cdot b+b \cdot c > b^2$ $a+b > c \Rightarrow a \cdot c+b \cdot c > c^2$ Prin însumarea ultimelor 3 inegalități obținem ceea ce rămăsese de demonstrat.	3p 6p 3p 4p 3p 2p 9p 3p 4p 3p 2p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a X -a

Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	a) Fie $A = \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2} \Rightarrow$ $A = \log_2(2^3 \cdot 3) \cdot \log_2(2^5 \cdot 3) - \log_2(2^6 \cdot 3) \cdot \log_2(2^2 \cdot 3) \Rightarrow$ $A = (3 + a)(5 + a) - (6 + a)(2 + a) \Rightarrow A = 3 \in \mathbb{Z}, \text{ unde } a = \log_2 3$ b) $\log_{ab} c = \frac{1}{\log_c ab} = \frac{1}{\log_c a + \log_c b} =$ $= \frac{1}{\frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}} = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$	1p 4p 6p 5p 5p
2.	a) $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2 \left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} \right) = 2 \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} = 2 \left(\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{1} \right) = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ b) Fie $N = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}}$ Aplicăm dubla inegalitate de la punctul a) pentru $n \geq 2$: $2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}$ $2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2026} - 2\sqrt{2025} < \frac{1}{\sqrt{2025}} < 2\sqrt{2025} - 2\sqrt{2024}$ (+) $2\sqrt{2026} - 2\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}} < 2\sqrt{2025} - 2\sqrt{1} \quad / +1$ $2\sqrt{2026} - 2\sqrt{2} + 1 < N < 2\sqrt{2025} - 1 = 89$ Demonstrăm că $2\sqrt{2026} - 2\sqrt{2} + 1 > 88$	5p 5p 2p 2p 1p 3p

	$2\sqrt{2026} - 2\sqrt{2} > 87$ $2\sqrt{2026} > 87 + 2\sqrt{2}$ $4 \cdot 2026 > 87^2 + 8 + 4\sqrt{2} \cdot 87$ $8104 - 7569 - 8 > 348\sqrt{2}$ $527 > 348\sqrt{2}$ $277729 > 242208 \Rightarrow N \in (88; 89)$ $\Rightarrow [N] = 88.$	1p 2p
3	a) $2026 = 3 \cdot 675 + 1 \Rightarrow z = (1 + \varepsilon)^{675} \cdot (1 + \varepsilon^2)^{675} \cdot 2^{675}(1 + \varepsilon) \Leftrightarrow$ $z = 2^{675} \cdot (1 + \varepsilon) = 2^{675} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^{675} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ $ z = 2^{675}, \arg z = \frac{\pi}{3}$ b) Înlocuind x cu ωx și $\omega^2 x$ obținem: $\begin{cases} f(x) + f(\omega x) = x \\ f(\omega x) + f(\omega^2 x) = \omega x \\ f(\omega^2 x) + f(\omega^3 x) = \omega^2 x \end{cases}$ Din ultimele 2 relații obținem: $f(\omega x) - f(\omega^3 x) = \omega x - \omega^2 x$, cum $\omega^3 = 1 \Rightarrow$ $f(x) = \frac{1 - \omega + \omega^2}{2} x \Rightarrow f(x) = -\omega x$	5p 5p 2p 3p 3p 3p
4	a) a) $f(f(x)) = f(x - 4[x] + [2x]) =$ $= x - 4[x] + [2x] - 4[x - 4[x] + [2x]] + [2x - 8[x] + 2[2x]]$ și, folosind proprietatea $[x + \alpha] = [x] + \alpha, \alpha \in \mathbb{Z}$, rezultă că $f(f(x)) = x - 4[x] + [2x] - 4([x] - 4[x] + [2x]) + [2x] - 8[x] + 2[2x]$ $= x,$ deci $(f \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$ b) $f(x + 2a) = f(x + a + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x + a) - f^2(x + a)} =$ $= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} \right)^2}$ $= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \frac{1}{4} - \sqrt{f(x) - f^2(x)} - f(x) + f^2(x)}$ $= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} = \frac{1}{2} + \left \frac{1}{2} - f(x) \right = f(x) \Rightarrow f \text{ este funcție periodică.}$	2p 3p 1p 3p 1p 2p 3p 3p 3p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a XI-a

Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Demonstrăm că șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente și au limita egală cu 1. Deoarece $x > 0$ rezultă că există un număr real ε cu proprietatea $0 < \varepsilon < x$. Având în vedere că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = x$ și considerând $V = (x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ deducem că există un număr natural n_0 cu proprietatea că pentru orice $n \geq n_0$ avem că $x_n^n \in V = (x - \varepsilon; x + \varepsilon)$. Deci, $x - \varepsilon < x_n^n < x + \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n^n < x + \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$. Obținem că $\sqrt[n]{x - \varepsilon} < x_n < \sqrt[n]{x + \varepsilon}$, pentru orice $n \geq n_0$. Folosind criteriul cleștelui și ultimele inegalități, deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Analog, demonstrăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$. Din ipoteză avem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = x$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n$ e o limită de tipul 1^∞. Aplicând metoda de rezolvare a acestui tip de limită obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1 + (x_n - 1))^{\frac{1}{x_n - 1}} \right]^{n \cdot (x_n - 1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (x_n - 1)}.$ Deci, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (x_n - 1)} = x$, de unde rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (x_n - 1) = \ln x$. Analog, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (y_n - 1) = \ln y$. Prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot x_n + b \cdot y_n)^n = [(a \cdot 1 + b \cdot 1)^\infty = 1^\infty] =$ $e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (a \cdot x_n + b \cdot y_n - 1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (a \cdot x_n + b \cdot y_n - a - b)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot n \cdot (x_n - 1) + b \cdot n \cdot (y_n - 1)} =$ $= e^{a \cdot \ln x + b \cdot \ln y} = (e^{\ln x})^a \cdot (e^{\ln y})^b = x^a \cdot y^b, \text{ ceea ce trebuia demonstrat.}$	7 puncte 2 puncte 6 puncte 6 puncte

2.	a) Metoda I $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B, \text{ unde } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$ Calculând obținem $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B^k = O_3$, pentru orice $k \geq 3$. Deoarece matricele I_3 și B comută între ele, adică $I_3 \cdot B = B \cdot I_3 = B$, putem aplica formula binomului lui Newton: $\begin{aligned} A^n &= (I_3 + B)^n = I_3 + C_n^1 \cdot B + C_n^2 \cdot B^2 + C_n^3 \cdot B^3 + C_n^4 \cdot B^4 + \dots = \\ &= I_3 + n \cdot B + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot B^2 + C_n^3 \cdot O_3 + C_n^4 \cdot O_3 + \dots = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$ $\text{Deci, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot n & \frac{21 \cdot n^2 - 11 \cdot n}{2} \\ 0 & 1 & 7 \cdot n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$ Metoda a II-a. Calculând obținem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 31 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 78 \\ 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 146 \\ 0 & 1 & 28 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ... Observăm că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot n & b_n \\ 0 & 1 & 7 \cdot n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $(b_n)_{n \geq 1}$ este un șir de numere naturale. Demonstrăm prin inducție matematică următoarea propoziție: $P(n)$: “există $b_n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot n & b_n \\ 0 & 1 & 7 \cdot n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$”. Evident, $P(1), P(2), P(3)$ și $P(4)$ sunt adevărate și $b_1 = 5, b_2 = 31, b_3 = 78, b_4 = 146$. Presupunem că $P(n)$ este adevărată pentru $n \in \mathbb{N}^*$ și demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată. $P(n+1)$: “există $b_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot (n+1) & b_{n+1} \\ 0 & 1 & 7 \cdot (n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$”. Deci, $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot n & b_n \\ 0 & 1 & 7 \cdot n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot n + 3 & 5 + 21 \cdot n + b_n \\ 0 & 1 & 7 \cdot n + 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$	2 puncte 2 puncte 2 puncte 4 puncte 3 puncte 2 puncte 1 punct 2 puncte 3 puncte
----	--	---

	$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot (n+1) & 5 + 21 \cdot n + b_n \\ 0 & 1 & 7 \cdot (n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ Considerăm $b_{n+1} = 5 + 21 \cdot n + b_n \in \mathbb{N}^*$ și obținem că $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot (n+1) & b_{n+1} \\ 0 & 1 & 7 \cdot (n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ de unde rezultă că } P(n+1) \text{ este adevărată.}$ În plus, din demonstrația de inducție am obținut relația de recurență $b_{n+1} = b_n + 21 \cdot n + 5$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $b_1 = 5$. Rezultă că $b_{k+1} - b_k = 21 \cdot k + 5$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ și $b_1 = 5$, de unde obținem $\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (21 \cdot k + 5) \Leftrightarrow b_n - b_1 = 21 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + 5 \cdot (n-1)$ $\Leftrightarrow b_n = \frac{21 \cdot n^2 - 11 \cdot n}{2}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$ Deci, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot n & \frac{21 \cdot n^2 - 11 \cdot n}{2} \\ 0 & 1 & 7 \cdot n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $a_n = 3 \cdot n$, $b_n = \frac{21 \cdot n^2 - 11 \cdot n}{2}$ și $c_n = 7 \cdot n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot b_n + 3}{a_n \cdot c_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{21 \cdot n^2 - 11 \cdot n + 3}{21 \cdot n^2} \right)^n = [1^\infty] =$ $= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{21 \cdot n^2 - 11 \cdot n + 3}{21 \cdot n^2} - 1 \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-11 \cdot n + 3}{21 \cdot n}} = e^{-\frac{11}{21}}$	2 puncte 3 puncte 4 puncte 4 puncte
3	a) Avem că $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right] = 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$ Deci, $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$ b) Notăm $P(n)$: "există $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx}{x^2}$ și $L_n \in \mathbb{R}$". $P(1)$ a fost demonstrată la subpunctul a). În continuare, presupunem că $P(n)$ este adevărată și demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar, fixat. $L_{n+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx \cdot \cos(n+1)x}{x^2} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx}{x^2} + \frac{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx \cdot \cos(n+1)x}{x^2} \right) =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx}{x^2} + \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx \cdot \frac{1 - \cos(n+1)x}{[(n+1)x]^2} \cdot (n+1)^2 \right) =$ $= L_n + \frac{(n+1)^2}{2} \in \mathbb{R}, \text{ de unde rezultă că propoziția } P(n+1) \text{ este adevărată.}$	8 puncte 2 puncte 4 puncte

	Demonstrația prin inducție este încheiată și, prin urmare, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. În plus, din demonstrația de inducție am obținut relația de recurență $L_{n+1} = L_n + \frac{(n+1)^2}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și, $L_1 = \frac{1}{2}$. Deducem că: $\begin{aligned} L_2 - L_1 &= \frac{2^2}{2} \\ L_3 - L_2 &= \frac{3^2}{2} \\ L_4 - L_3 &= \frac{4^2}{2} \\ &\dots\dots\dots \\ L_n - L_{n-1} &= \frac{n^2}{2} \end{aligned}$ $L_n - L_1 = \frac{2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2}{2}$ Obținem că $L_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2}{2} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{12}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{12 \cdot n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{12} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right] = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{6}.$	1 punct 2 puncte 4 puncte
4	a) Deoarece $\text{card } S_4 = 24$ și $G \subset S_4$ rezultă că mulțimea G este finită. Dacă $x = e \in G$, atunci $x^{-1} = e \in G$. Dacă $x \in G - \{e\}$, atunci folosind proprietatea 1) a mulțimii G și inducția matematică obținem că $x^k \in G$, pentru orice k număr natural nenul. Dar, mulțimea G este finită și $x^k \in G$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, de unde rezultă că există numerele naturale nenule p, q cu $p < q$ astfel încât $x^p = x^q \Leftrightarrow x^{q-p} = e$. Notăm $m = q - p \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$ și avem $x^m = e \Leftrightarrow x^{m-1} \cdot x = x \cdot x^{m-1} = e$, de unde rezultă că $x^{-1} = x^{m-1} \in G$. b) Calculând obținem că $b \cdot a \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 4)$ și $a^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (3, 4).$ c) Observăm că $b \cdot a \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 4) \in G$, $a^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (3, 4) \in G,$	2 puncte 2 puncte 2 puncte 2 puncte 4 puncte 4 puncte 3 puncte

$a \cdot b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 4) \in G,$ $a \cdot b \cdot a \cdot (1, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1, 3) \in G,$ $a^2 \cdot (1, 4) \cdot (3, 4) \cdot (2, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1, 2) \in G$ $\text{Și } b^2 \cdot (1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (2, 3) \in G.$ Având în vedere egalitățile de mai sus, subpunctul a) și proprietatea 1) a mulțimii G, deducem că orice transpoziție din S_4 aparține mulțimii G. Cum orice permutare din S_4 se descompune într-un produs de transpoziții, orice transpoziție din S_4 aparține mulțimii G și folosind proprietatea 1) a mulțimii G deducem că $G = S_4$.	2 puncte
---	-----------------

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a XII -a

Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	a. $A(a, b) \cdot A(c, d) = A(a + c, ac + b + d), a, b, c, d \in R$ Asociativitate $A(0, 0) \in M$ element neutru Orice element al multimii M este simetrizabil; $A(-a, -b + a^2) \in M$ este simetricul elementului $A(a, b)$ Concluzie $(M, \cdot)$ grup b. $X = I_3 + B$, unde $B^n = O_3$, pentru orice n număr natural, $n \geq 3$ Fie $X = A(a, b) \in M, a, b \in \mathbb{R}$. Din punctul a) se știe că $(M, \cdot)$ este grup. Cazul $n \in \mathbb{N}^*, X^n = A\left(na, nb + \frac{n(n-1)}{2}a^2\right)$ Cazul $n < 0$. Fie $n = -m, m \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $(M, \cdot)$ este grup, toate elementele $X = A(a, b) \in M$ sunt simetrizabile. Rezultă că $X^n = (X^{-1})^m = (A(-a, -b + a^2))^m = A\left(-ma, -mb + ma^2 + \frac{m(m-1)}{2}a^2\right) =$ $= A\left(-ma, -mb + \frac{m(m+1)}{2}a^2\right) \underset{n=-m}{=} A\left(na, nb + \frac{n(n-1)}{2}a^2\right)$ $A(1, 2)^{-1} = A(-1, -1)$ Ecuția devine $A\left(na, nb + \frac{n(n-1)}{2}a^2\right) = A(1, 3) \cdot A(-1, -1) \Leftrightarrow A\left(na, nb + \frac{n(n-1)}{2}a^2\right) = A(0, 1) \underset{n \neq 0}{\Leftrightarrow} a = 0, b = \frac{1}{n}$ Soluția ecuației este $A\left(0, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{Z}^*$	3p 2p 3p 3p 1p 3p 3p 3p
2.	Se consideră funcția $f: [0, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f(x) = \arcsin(x - \sqrt{1 - x^2})$ care este strict crescătoare și se anulează pentru $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $I = - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(x - \sqrt{1 - x^2}) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \arcsin(x - \sqrt{1 - x^2}) dx$	5p 2p

	$I_1 = - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(x - \sqrt{1-x^2}) dx = - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin\left(\frac{2x^2-1}{x+\sqrt{1-x^2}}\right) dx$ $= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin\left(\frac{1-2x^2}{x+\sqrt{1-x^2}}\right) dx$ (schimbare de variabilă $x = \sin t$)	2p
	$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin\left(\frac{1-2\sin^2 t}{\sin t + \sqrt{1-\sin^2 t}}\right) \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin\left(\frac{\cos 2t}{\sin t + \cos t}\right) \cdot \cos t dt$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin(\cos t - \sin t) \cdot \cos t dt$	3p
	$I_2 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \arcsin(x - \sqrt{1-x^2}) dx = - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \arcsin(\sqrt{1-x^2} - x) dx$ $= \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(\sqrt{1-x^2} - x) dx$ (schimbare de variabilă $x = \sin t$)	2p
	$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \arcsin\left(\frac{1-2\sin^2 t}{\sin t + \sqrt{1-\sin^2 t}}\right) \cdot \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \arcsin(\cos t - \sin t) \cdot \cos t dt$ $= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin(\sin y - \cos y) \cdot \sin y dy$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin(\cos y - \sin y) \cdot \sin y dy$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin(\cos t - \sin t) \cdot \sin t dt.$	2p
	$I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin(\cos t - \sin t) \cdot (\cos t + \sin t) dt = - \int_1^0 \arcsin u \cdot (-du)$ $= \int_0^1 \arcsin u du \text{ (schimbare de variabilă } u = \cos t - \sin t)$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \cdot \cos z dz = z \cdot \sin z \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin z dz = \frac{\pi}{2} - 1.$	2p
		1p

3	a) Funcția f este continuă și bijectivă. Rezultă că $G = \text{Im}f$. $f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} < 0,$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$ De aici $G = \text{Im}f = (-1, 1)$ b) Cum $f : \mathbb{R} \rightarrow G, f(x) = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$ un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, \circ)$, rezultă că $f^{-1} = g : G \rightarrow \mathbb{R}$ este, de asemenea, izomorfism Se determină $g(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$, funcție bine definită, continuă și bijectivă $g(x) + g(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x-y+xy}{1+x+y+xy} \right) = g(x \circ y)$ $\Rightarrow x \circ y = f \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x-y+xy}{1+x+y+xy} \right) \right) = \frac{1-e^{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x-y+xy}{1+x+y+xy} \right)}}{1+e^{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x-y+xy}{1+x+y+xy} \right)}} = \frac{x+y}{1+xy}, (\forall) x, y \in (-1, 1)$	2p 3p 3p 3p 3p 2p 2p 3p
4	$\int_0^1 f(x) - a dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) - a dx + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) - a dx}_{x=t+\frac{1}{2}} =$ $= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) - a dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left f\left(t + \frac{1}{2}\right) - a \right dt$ $= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x) - a + \left f\left(x + \frac{1}{2}\right) - a \right \right) dx$ $\geq \int_0^{\frac{1}{2}} \left f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x) \right dx =$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \left \left[f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \left[f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) \right] \right dx \text{ (} f \text{ este monotună)}$ $= \int_0^{\frac{1}{2}} \left f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) \right dx$ $= \int_0^1 \left f(t) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \left f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) \right dx$ $= \int_0^1 \left f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right dx.$	3p 3p 2p 2p 4p 3p 2p 2p