

Problema 29258, clasa a XII-a, GM.11

Fie $0 < a < b$ și $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile, cu derivatele continue. Știind că

$\int_a^b 2xf(x)dx = a^2g(a) - b^2g(b)$ și $\int_a^b 2xg(x)dx = a^2f(a) - b^2f(b)$, arătați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = g'(c)$.

Dan Dumitrescu, București

Soluție:

Avem

$\int_a^b 2xf(x)dx = \int_a^b f(x)(x^2)' dx = x^2f(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)x^2dx = b^2f(b) - a^2f(a) - \int_a^b f'(x)x^2dx$, dar din ipoteză aveam $\int_a^b 2xf(x)dx = a^2g(a) - b^2g(b)$, de unde rezultă că

$\int_a^b f'(x)x^2dx = b^2f(b) - a^2f(a) + b^2g(b) - a^2g(a)$. Analog, din

$\int_a^b 2xg(x)dx = \int_a^b g(x)(x^2)' dx = x^2g(x)|_a^b - \int_a^b g'(x)x^2dx = b^2g(b) - a^2g(a) - \int_a^b g'(x)x^2dx$ și relația din ipoteză $\int_a^b 2xg(x)dx = a^2f(a) - b^2f(b)$, rezultă că

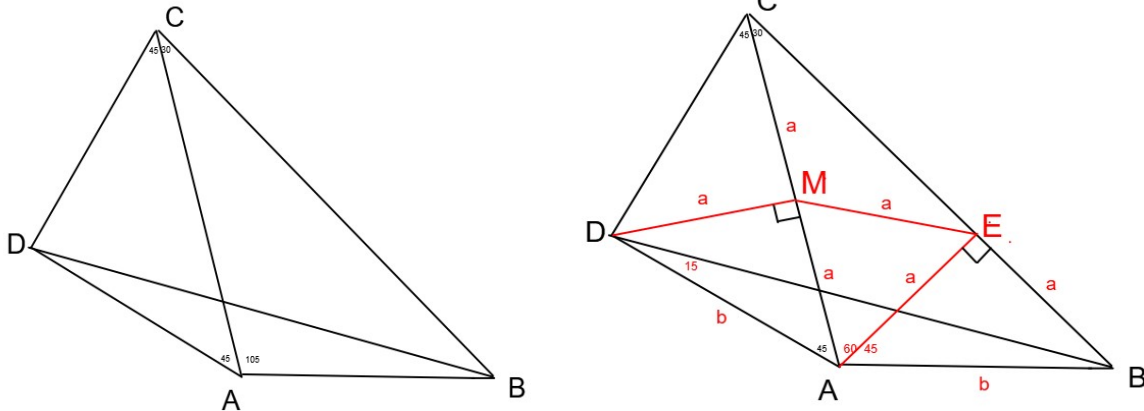
$\int_a^b g'(x)x^2dx = b^2f(b) - a^2f(a) + b^2g(b) - a^2g(a)$. Așadar, $\int_a^b f'(x)x^2dx = \int_a^b g'(x)x^2dx$, deci

$\int_a^b (f'(x) - g'(x))x^2dx = 0 = H(b) - H(a)$, unde $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției continue de sub integrală. Din teorema lui Rolle aplicată funcției H pe intervalul $[a, b]$ există $c \in (a, b)$ astfel încât $H'(c) = 0$, deci $(f'(c) - g'(c))c^2 = 0$, de unde ținând cont că $c > 0$, rezultă că $f'(c) = g'(c)$.

Problema E:17331, clasa a VII-a, G.M:10

În patrulaterul convex $ABCD$, $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle BAD = 150^\circ$, iar triunghiul ADC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza AC . Calculați măsura unghiului $\angle BDC$.

Ion Ciudin, Botoșani



Soluție: Se deduc imediat măsurile unghiurilor triunghiului ABC :

$$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = 150^\circ - 45^\circ = 105^\circ, \text{ respectiv } \angle ACB = 30^\circ.$$

Construim $AE \perp BC, E \in BC$. Deoarece $\angle ABE = 45^\circ$, rezultă că triunghiul EAB este dreptunghic isoscel cu catetele $AB = AC = a$, iar din teorema unghiului de 30° în triunghiul dreptunghic EAC rezultă că $AC = 2AE = 2a$.

Fie M mijlocul segmentului AC . DM și AM sunt mediane corespunzătoare ipotenuzei AC în triunghiurile dreptunghice EAC, DAC , deci $EM = DM = \frac{1}{2} AC = a$. Rezultă că triunghiurile dreptunghice isoscele EAB și MAD sunt congruente, deci ipotenuzele AD și AB sunt congruente, așadar triunghiul ADB este isoscel cu $\angle BAD = 150^\circ$, deci

$$\angle ADB = \angle ABD = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ. \text{ În concluzie, } \angle BDC = \angle ADC - \angle ADB = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

Problema 29253, clasa a XI-a, GM. 11

Fie $a, b \in \mathbb{N}$ care verifică $a^2 - b = 1$. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sum_{k=1}^n \left\{ (a + \sqrt{b})^k \right\} \right)$.

Romanța și Ioan Ghiță, Blaj

Soluție: Dacă $b = 0$, rezultă $a = 1$, iar $\left\{ (a + \sqrt{b})^k \right\} = \{1\} = 0$, așadar limita cerută este $+\infty$

În cazul general, dacă $b \in \mathbb{N}^*$, $a^2 = b + 1 \geq 2$, deci $a \geq 2$.

Avem $a^2 - b = (a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) = 1$, deci $a - \sqrt{b} = \frac{1}{a + \sqrt{b}} < 1$ pentru $b \in \mathbb{N}^*$, $a \geq 2$, deci

$a - \sqrt{b} \in (0, 1)$.

Folosind binomul lui Newton, avem:

$(a + \sqrt{b})^k = x_k + y_k \sqrt{b}$, $(a - \sqrt{b})^k = x_k - y_k \sqrt{b}$, unde $x_k, y_k \in \mathbb{N}$. Prin adunarea celor două relații rezultă $(a + \sqrt{b})^k + (a - \sqrt{b})^k = 2x_k$, deci $(a + \sqrt{b})^k = 2x_k - (a - \sqrt{b})^k \in (2x_k - 1; 2x_k)$, deci

$\left[(a + \sqrt{b})^k \right] = 2x_k - 1$, iar $\left\{ (a + \sqrt{b})^k \right\} = (a + \sqrt{b})^k - \left[(a + \sqrt{b})^k \right] = 1 - (a - \sqrt{b})^k$.

Limita cerută va fi

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sum_{k=1}^n \left(1 - (a - \sqrt{b})^k \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a - \sqrt{b})^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (a - \sqrt{b}) \frac{1 - (a - \sqrt{b})^n}{1 - (a - \sqrt{b})} = \frac{a - \sqrt{b}}{1 - a + \sqrt{b}}.$$