

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a V-a

Problema 1.

Fie șirul de numere naturale:

1,2,3,4,5,6,11,12,13,14,15,16,21,22,23,24,25,26,...,2021,2022,2023,2024,2025,2026.

- a) Află numărul termenilor șirului;
- b) Calculați suma termenilor șirului.

Problema 2.

Vârsta lui Ionel este de $\overline{2a}$ ani și vârsta mamei sale este de $\overline{a2}$ ani. În momentul în care vârsta lui Ionel este de $\overline{2b}$ ani, vârsta mamei sale este egală cu dublul vârstei acestuia. Aflați câți ani are Ionel.

Gazeta Matematică, Septembrie 2025

Problema 3.

- a) Arătați că numerele de forma $N = 9^n + 7^{2 \cdot n + 1}$ nu pot fi pătrate perfecte, pentru orice valoare a numărului natural n .
- b) Comparați numerele $a = 3^{2026}$ și $b = 4^{615} \cdot 5^{804}$.

Problema 4.

- a) Aflați numărul natural nenul a știind că împărțind numărul 2651 la numărul $(a^2 + a)$ se obține câtul 16 și restul maxim.
- b) Fie $S = 4 + 45 + 455 + \dots + \underbrace{4555\dots5}_{2026 \text{ cifre}}$. Determinați restul împărțirii numărului S la 41.

Notă: Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată de la 0 la 21 puncte.
Se acordă 16 puncte din oficiu.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a VI-a

Problema 1

a) Se consideră numerele :

$$a = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{100 \cdot 103} \quad \text{și} \quad b = \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{102 \cdot 107}.$$

Determinați valoarea raportului $\frac{103a+214b}{103a-214b}$.

b) Fie numerele a, b, c, d, e, f astfel încât $\frac{2026}{a+2} + \frac{2026}{b+3} + \frac{2026}{c+4} + \frac{2026}{d+5} + \frac{2026}{e+6} + \frac{2026}{f+7} = 2025$.

Calculați $S = \frac{a+1}{a+2} + \frac{b+2}{b+3} + \frac{c+3}{c+4} + \frac{d+4}{d+5} + \frac{e+5}{e+6} + \frac{f+6}{f+7}$.

Supliment Gazeta Matematică 9/2025 (enunț modificat)

Problema 2

Dacă împărțim un număr natural n , pe rând, la 25, 45 și respectiv 81, suma resturilor obținute este egală cu 148. Arătați că numărul $n + 2026$ se divide cu 2025.

Problema 3

a) Determinați numerele naturale a și b pentru care au loc relațiile : $5 < a < b < 90$, iar numerele $(a; b)$ și $[a; b]$ sunt invers proporționale cu numerele 0,2 și 0,0(1).

Notațiile $(a; b)$ și $[a; b]$ reprezintă cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

b) Se știe că numerele $\overline{abc}$ și $\overline{cba}$, scrise în baza 10, sunt divizibile cu 7. Arătați că numărul $n = 4a + b + 4c$ este divizibil cu 7.

Problema 4

Se consideră un unghi ascuțit $\sphericalangle AOB$ și două semidrepte OC respectiv OD astfel încât $OC \perp OA$ și $OB \perp OD$ iar interioarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ să fie disjuncte. Se construiesc OM bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, ON bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$ și OP bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$.

a) Demonstrați că punctele M, O, N sunt coliniare;

b) Determinați măsura unghiului $\sphericalangle PON$.

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 21 puncte.

Se acordă 16 puncte din oficiu.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a VII -a

Problema 1

Rezolvați ecuația: $(\sqrt{2027} - \sqrt{2026})^x = (\sqrt{2027} + \sqrt{2026})^{2025}$ în mulțimea numerelor întregi.

G.M. 6-7-8/2025

Problema 2

Comparați numerele a și b, unde:

$$a = \sqrt{4^{2026} - 3 \cdot 4^{2025} - 3 \cdot 4^{2024} - \dots - 3 \cdot 4 - 3} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \text{ și}$$

$$b = \frac{3}{10 \cdot (8\sqrt{6} - 5\sqrt{15})} : \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right).$$

Problema 3

Se consideră triunghiul isoscel MNP ($MN \equiv MP$) cu înălțimile MM' , NN' , PP' , unde M' , N' , P' aparțin laturilor NP, MP, respectiv MN. Fie H ortocentrul triunghiului și T mijlocul segmentului MH. Să se afle măsura unghiului NMP astfel încât patrulaterul $M'N'TP'$ să fie romb.

Problema 4

Fie pătratul ABCD și punctele N și M pe latura AB, respectiv pe diagonala AC, astfel încât $AN = NB$ și $MN = MB$. Arătați că $MD \perp MN$ și $AM = 3MC$.

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 21 puncte.

Se acordă 16 puncte din oficiu.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a VIII-a

Problema 1

a) Fie $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x \in (-2, 6)$ și $y \in (-5, 3)$.

Arătați că numărul n este pătrat perfect, unde $n = \sqrt{(x + y - 9)^2} + \sqrt{(x + y + 7)^2}$.

b) Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât:

$$\sqrt{x^2 + 2x \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2024 \cdot 2025} \right) + \left(\frac{2024}{2025} \right)^2} = \frac{4049}{2025}.$$

Problema 2

Triunghiul ABC , cu $AB = 26$, $AC = 30$ și $BC = 28$ se îndoaie de-a lungul liniei mijlocii MN , $M \in AB$, $N \in AC$ până când planele (AMN) și (BMN) devin perpendiculare. Aflați:

a) distanța de la punctul A la dreapta BC după îndoire;

b) raportul dintre aria triunghiului ABC înainte și după îndoire.

Problema 3

Se consideră numerele $\overline{abc}$, $\overline{xy}$ și $\overline{uv}$, care au proprietățile $\overline{abc} = \overline{xy}^2 + \overline{uv}^2$, $\overline{cba} = \overline{yx}^2 + \overline{vu}^2$ și $a < c$.

a) Arătați că $a + b + c = (x + y)^2 + (u + v)^2$.

b) Aflați numerele $\overline{abc}$ cu proprietățile din enunț.

G.M. nr. 9/ 2025

Problema 4

O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ are bazele triunghiuri echilaterale cu latura de lungime a . Știind că dreptele AB' și BC' sunt perpendiculare, aflați:

a) lungimea muchiei laterale;

b) tangenta unghiului format de planele (BMC') și (ABC) , unde M este mijlocul muchiei AC .

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 21 puncte.

Se acordă 16 puncte din oficiu.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a IX-a

Problema 1

- a) Arătați că $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
- b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{2x-3}{6}\right] + \left[\frac{2x-1}{6}\right] + \left[\frac{2x+1}{6}\right] = \frac{3x+1}{5}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Problema 2

Se consideră numărul real $a = 1013 + \sqrt{1012 \cdot 1014}$ și șirul $(s_n)_{n \geq 1}$, $s_n = a^n + \frac{1}{a^n}$.

Să se demonstreze că:

- a) $s_n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
b) $s_{2n-1} \leq 2026, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 3

Se consideră patrulaterul $ABCD$ înscris într-un cerc de centru O . Se notează cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA , respectiv DAB și cu M, N mijloacele diagonalelor AC , respectiv BD .

- a) Arătați că segmentele DH_1, AH_2, BH_3, CH_4 au același mijloc.
b) Dacă P și Q sunt mijloacele segmentelor DH_1 , respectiv MN , arătați că punctele O, P și Q sunt coliniare.

Supliment Gazeta Matematică nr.11/2025

Problema 4

Dacă a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi, demonstrați că

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} > \frac{2}{3}$$

Notă: Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 21 puncte.
Se acordă 16 puncte din oficiu.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a X -a

Problema 1

Demonstrați că:

a) numărul $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$ este întreg;

b) $\log_{ab} c = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}, \forall a, b, c > 1.$

Supliment GM nr.10/2025

Problema 2

a) Dacă n este un număr natural nenul, demonstrați că

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

b) Determinați partea întreagă a numărului

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}}.$$

Problema 3

a) Fie ε o rădăcină de ordinul trei a unității, $\varepsilon \neq 1$, și numărul complex $z = (1 + \varepsilon) \cdot (1 + \varepsilon^2) \cdot \dots \cdot (1 + \varepsilon^{2026})$. Determinați $|z|$ și $\arg z$.

b) Să se determine funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ știind că: $f(x) + f(\omega x) = x, \forall x \in \mathbb{C}$, unde ω este o rădăcină cubică nereală a unității.

Problema 4

a) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 4[x] + [2x]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a .

Să se calculeze $(f \circ f)(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Fie $a > 0$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care verifică relația $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că funcția f este periodică.

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 21 puncte.

Se acordă 16 puncte din oficiu.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapă locală, Galați - 7 februarie 2026

Clasa a XI -a

Problema 1

Fie $a, b > 0$ cu $a + b = 1$ și $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$ două șiruri de numere reale pozitive, pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = x$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^n = y$, unde $x, y > 0$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot x_n + b \cdot y_n)^n = x^a \cdot y^b$.

Problema 2

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se demonstreze că există șirurile de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}, (c_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot b_n + 3}{a_n \cdot c_n} \right)^n$.

Problema 3

Se consideră $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx}{x^2}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze L_1 .

b) Folosind eventual metoda inducției matematice,

să se determine termenul general al șirului $(L_n)_{n \geq 1}$.

c) Dacă $L_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{12}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n^3}$.

Problema 4

Fie G o mulțime nevidă de permutări inclusă în S_4 cu proprietățile:

1) dacă $\sigma, \tau \in G$, atunci $\sigma \cdot \tau \in G$

2) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in G$

3) $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in G$

a) Să se demonstreze că dacă $x \in G$, atunci $x^{-1} \in G$.

b) Să se calculeze $b \cdot a \cdot b$ și $a^{-1} \cdot b$.

c) Să se demonstreze că $G = S_4$.

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 21 puncte.

Se acordă 16 puncte din oficiu.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a XII-a

Problema 1

$$\text{Fie } M = \left\{ A(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- a. Să se arate că $(M, \cdot)$ este grup
- b. Să se determine matricele $X \in M$, dacă $X^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}^*$.

Problema 2

Să se calculeze: $I = \int_0^1 |\arcsin(x - \sqrt{1-x^2})| dx$.

Problema 3

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow G, f(x) = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$ un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, \circ)$.

- a) Determinați mulțimea G .
- b) Determinați legea de compoziție „ $\circ$ ”.

Supliment Gazeta Matematică, nr.11/2025

Problema 4

Fie $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă și monotonă. Să se demonstreze că:

$$\int_0^1 |f(x) - a| dx \geq \int_0^1 \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| dx.$$

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 21 puncte.

Se acordă 16 puncte din oficiu.